Übungen zur Vorlesung „Mathematische Statistik“

Blatt 9

Abgabetermin: Mittwoch, 19.12.2018, bis 12.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1.
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Beweisen Sie Satz 2.2.2 der Vorlesung in folgenden Schritten:

a) Zeigen Sie, dass für eine Zufallsvariable $X_1 \sim \mathrm{N}(0,1)$ die Verteilung von $Y := X_1^2$ eine χ_1^2-Verteilung mit der Dichte aus Definition 2.2.1 (für $n = 1$) hat.

HINWEIS: Stellen Sie $\mathbb{P}(Y \leq x)$ mit Hilfe der Verteilungsfunktion von X_1 dar und ermitteln Sie daraus dann die Dichte von Y. Es gilt $\Gamma\big(\frac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}$.

b) Seien $Z_1 \sim \Gamma(\lambda_1, \beta)$ und $Z_2 = \Gamma(\lambda_2, \beta)$ zwei unabhängige, Gamma-verteilte Zufallsvariablen mit Dichten $f_{Z_1}(x)$ und $f_{Z_2}(x)$ (vgl. Übungsblatt 6, Aufgabe 2). Zeigen Sie durch Anwendung der Faltungsformel

$$f_{Z_1+Z_2}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{Z_1}(x-y)\, f_{Z_2}(y)\, dy,$$

dass $Z_1 + Z_2 \sim \Gamma(\lambda_1 + \lambda_2, \beta)$, und folgern Sie daraus, dass für unabhängige, identisch nach $\mathrm{N}(0,1)$ verteilte Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt, dass $\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi_n^2$.

HINWEIS: Bringen Sie das Faltungsintegral durch eine geeignete Substution auf die schon aus der Vorlesung bekannte Form $\int_0^1 t^{r-1}(1-t)^{s-1}\, dt$ (vgl. Definition 1.12.11).

c) Zeigen Sie nun, dass für unabhängige $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ und $Y \sim \chi_n^2$ die Zufallsvariable $Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ einer t-Verteilung t_n mit n Freiheitsgraden und der in Definition 2.2.1 angegebenen Dichte folgt, indem Sie

$$\mathbb{P}\left(\frac{X\sqrt{n}}{\sqrt{Y}} \leq x\right) = \int_{\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{u}{\sqrt{v}} \leq x\}} f_{\sqrt{n}X}(u)\, f_Y(v)\, du\, dv$$

mit Hilfe der Substitution $z = \frac{u}{\sqrt{v}}$ in ein Doppelintegral $\int_{-\infty}^x \int_{\mathbb{R}_+} \ldots\, dv\, dz$ umwandeln und das innere Integral explizit ausrechnen.

HINWEIS: Verwenden Sie dabei die Definition der Gammafunktion: $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $\mathscr{M}^{\otimes n}$ das n-fache Gleichverteilungsmodell mit $\mathscr{M} = \big(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), (\mathbb{P}_\vartheta = \mathrm{UC}(0,\vartheta),\ \vartheta \in \Theta = (0,\infty))\big)$. Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe von n unabhängigen, identisch nach $\mathrm{UC}(0,\vartheta)$ verteilten Zufallsvariablen und $X_{(n)} := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\frac{X_{(n)}}{\vartheta}$ ein Pivot für ϑ ist und verwenden Sie diese Eigenschaft, um zu zeigen, dass

$$\left[\frac{X_{(n)}}{\big(1-\frac{\alpha}{2}\big)^{\frac{1}{n}}}, \frac{X_{(n)}}{\big(\frac{\alpha}{2}\big)^{\frac{1}{n}}}\right]$$

ein Konfidenzintervall zum Niveau α für den Parameter ϑ ist.

b) Wie ist c_α zu wählen, damit auch $[X_{(n)}, c_\alpha X_{(n)}]$ ein Konfidenzintervall zum Niveau α für ϑ ist?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\mathscr{M}^{\otimes n}$ das n-fache Exponentialverteilungsmodell mit $\mathscr{M} = \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_\vartheta = \operatorname{Exp}(\vartheta) : \vartheta \in (0,\infty)\big)$. Sei $X = (X_1, \dots, X_n)$ eine Stichprobe von n unabhängigen, identisch nach $\operatorname{Exp}(\vartheta)$ verteilten Zufallsvariablen und $X_{(1)} := \min\{X_1, \dots, X_n\}$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\left[\frac{-\ln(1-\frac{\alpha}{2})}{nX_{(1)}}, \frac{-\ln(\frac{\alpha}{2})}{nX_{(1)}}\right]$$

ein Konfidenzintervall zum Niveau α für den Parameter ϑ ist.

b) Bekanntlich ist in diesem Modell $\widehat{\vartheta}_{ML}(X) = \frac{1}{\overline{X}}$ mit $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ der Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ. Zeigen Sie, dass $\frac{2\vartheta n}{\widehat{\vartheta}_{ML}(X)}$ ein Pivot ist und bestimmen Sie damit ein alternatives Konfidenzintervall zum Niveau α für ϑ.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 1 b) und überlegen Sie sich, dass für eine $\Gamma(\lambda, \beta)$-verteilte Zufallsvariable Z und $a > 0$ gilt $aZ \sim \Gamma(\lambda', \beta')$. Wie sehen λ' und β' dabei genau aus?

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei $\mathscr{M} = \big(\Omega, \mathscr{F}, (\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta)\big)$ ein statistisches Modell mit $\Theta \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) Ist $C : \Omega \to \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ein Konfidenzintervall zum Niveau α für $\tau(\vartheta) = \vartheta$ und $\vartheta_0 \in \Theta$, so ist

$$\varphi_{\vartheta_0}(x) = \begin{cases} 1, & \vartheta_0 \notin C(x), \\ 0, & \vartheta_0 \in C(x) \end{cases}$$

ein Test der einfachen Hypothese $\Theta_0 = \{\vartheta_0\}$ gegen die Alternative $\Theta_1 = \Theta \setminus \{\vartheta_0\}$ zum Niveau α.

b) Sei umgekehrt für jedes $\vartheta_0 \in \Theta_0$ ein Test $\varphi_{\vartheta_0}(x)$ zum Niveau α für die einfache Hypothese $\Theta_0 = \{\vartheta_0\}$ gegen die Alternative $\Theta_1 = \Theta \setminus \{\vartheta_0\}$ gegeben, dann ist

$$C(x) = \{\vartheta \in \Theta \mid \varphi_\vartheta(x) = 0\}$$

ein Konfidenzintervall zum Niveau α für $\tau(\vartheta) = \vartheta$.