Übungen zur Vorlesung „Mathematische Statistik“

Blatt 8

Abgabetermin: Mittwoch, 12.12.2018, bis 12.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1.
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\mathscr{M} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta))$ ein statistisches Modell, dann heißt eine Statistik V *Ancillary-Statistik*, falls für alle $\vartheta \in \Theta$ gilt, dass die Verteilung $\mathbb{P}_\vartheta^V$ von V bzgl. $\mathbb{P}_\vartheta$ nicht von ϑ abhängt.

a) Zeigen Sie: Ist T eine vollständige und suffiziente Statistik, so ist jede Ancillary-Statistik V unabhängig von T bezüglich $\mathbb{P}_\vartheta$ für alle $\vartheta \in \Theta$.

b) Folgern Sie aus Teil a), dass im n-fachen Gaußmodell $\mathscr{M}^{\otimes n}$, $\mathscr{M} = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), (\mathbb{P}_\vartheta = N(\mu, \sigma_0^2) : \vartheta = \mu \in \Theta = \mathbb{R}))$ mit bekannter Varianz σ_0^2 die Größen $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ und $s^2(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$ unabhängig sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei das n-fache Bernoulli-Modell $\mathscr{M}^{\otimes n}$ mit $\mathscr{M} = (\{0,1\}, \mathfrak{P}(\{0,1\}, (\mathbb{P}_\vartheta = \mathrm{Ber}(\vartheta) : \vartheta \in \Theta = (0,1)))$ (vgl. Beispiele 1.1.9–1.1.11 der Vorlesung) und $\mathscr{T} = \mathcal{B}((0,1))$, dann ist $(\mathscr{M}^{\otimes n}, \mathscr{T})$ ein Bayes'sches Modell. Die a-priori-Verteilung sei eine Beta-Verteilung $\mathrm{Beta}(a,b)$ (vgl. Definition 1.12.11 der Vorlesung), d.h. $\nu = \mathrm{Beta}(a,b)$ mit $a, b > 0$.

a) Bestimmen Sie die a-posteriori-Verteilung für ϑ, gegeben die Beobachtungen $X_1, \dots, X_n$, und zeigen Sie, dass

$$X_{a,b} := \frac{\sum_{i=1}^n X_i + a}{n+a+b}$$

der a-posteriori-Erwartungswert von ϑ ist.

b) Berechnen Sie für die Kenngröße $\tau(\vartheta) = \vartheta$ und den a-posteriori-Erwartungswert $X_{a,a}$ aus Teil a) den mittleren quadratischen Fehler $\mathbb{F}_\vartheta(X_{a,a})$ sowie den über X und ϑ gemittelten Fehler $\mathbb{F}_\nu(X_{a,a})$ (vgl.Definition 1.12.13 (a) der Vorlesung).

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Betrachten Sie wie in Aufgabe 3 das n-fache Bernoulli-Modell mit der a-priori-Verteilung $\nu := \frac{1}{2}(\lambda_{[0,1]} + \delta_{\frac{1}{2}})$, wobei $\lambda_{[0,1]}$ das auf das Intervall $[0,1]$ eingeschränkte Lebesguemaß bezeichne und $\delta_{\frac{1}{2}}$ die Einpunktmasse (Dirac-Maß) im Punkt $x = \frac{1}{2}$.
Berechnen Sie die a-posteriori-Verteilung von ϑ gegeben $X_1, \dots, X_n$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\mathscr{M}^{\otimes n}$ das n-fache Exponentialmodell mit $\mathscr{M} = (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), (\mathbb{P}_\vartheta = \mathrm{Exp}(\vartheta) : \vartheta \in (0,\infty)))$ und $\mathscr{T} = \mathcal{B}((0,\infty))$, dann ist

$$L : \Theta \times \Omega \to \mathbb{R}_+, \quad L(x,\vartheta) = \vartheta^n e^{-\vartheta \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_i)$$

als stetige Funktion in ϑ und x $\mathscr{T} \otimes \mathscr{F} = \mathcal{B}((0,\infty)) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-messbar, d.h. $(\mathscr{M}^{\otimes n}, \mathscr{T})$ ist ein Bayes'sches Modell. Die a-priori-Verteilung ν auf $(\Theta, \mathscr{T})$ sei die Gamma-Verteilung $\Gamma(\lambda, \beta)$ mit festen Parametern $\lambda, \beta > 0$ (vgl. dazu auch Übungsblatt 6, Aufgabe 2 b)).
Bestimmen Sie die a-posteriori-Verteilung für ϑ, gegeben die Beobachtungen $X_1, \ldots, X_n$, und daraus den Bayes-Schätzer für die Kenngröße $\tau(\vartheta) = \vartheta$.