Übungen zur Vorlesung „Mathematische Statistik“

Blatt 7

Abgabetermin: Mittwoch, 5.12.2018, bis 12.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1.
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass $s^2(X)$ der gleichmäßig beste Schätzer für σ^2 im n-fachen Gaußmodell mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2 ist. Zeigen Sie, dass $s^2(X)$ kein gleichmäßig bester Schätzer für σ^2 im n-fachen Gaußmodell ist, falls der Mittelwertparameter $\mu = \mu_0$ bekannt ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachten Sie für $n \geq 2$ das n-fache Gaußmodell $\mathscr{M}^{\otimes n}$ mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2, d.h. $\mathscr{M} = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), (\mathbb{P}_\vartheta = N(\mu, \sigma^2) : \vartheta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times (0, \infty)))$.

a) Berechnen Sie $\mathbb{E}_\vartheta[(cS_n^2 - \sigma^2)^2]$ für beliebiges $c > 0$, wobei

$$S_n^2 := \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2 .$$

b) Betrachten Sie nun speziell die Fälle $c_1 = \frac{1}{n-1}$, $c_2 = \frac{1}{n}$ und $c_3 = \frac{1}{n+1}$. Was fällt Ihnen auf? Interpretieren Sie das erhaltene Ergebnis.

Hinweis: Zur Berechnung des Erwartungswertes in Teil a) benötigen Sie die χ_n^2-Verteilung, vgl. dazu S. 17/18 im Vorlesungsskript.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sie $\mathscr{M} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta))$ ein statistisches Modell, $\tau : \Theta \to \mathbb{R}$ eine zu schätzende Kenngröße und T' ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\vartheta)$ mit $\mathrm{Var}_\vartheta[T'] < \infty$ für alle $\vartheta \in \Theta$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) $\mathrm{Var}_\vartheta[T'] \leq \mathrm{Var}_\vartheta[T]$ für alle $\vartheta \in \Theta$ und alle erwartungstreuen Schätzer T von $\tau(\vartheta)$, d.h. T' ist gleichmäßig bester Schätzer für $\tau(\vartheta)$.

b) $\mathbb{E}_\vartheta[T'S] = 0$ für alle $\vartheta \in \Theta$ und alle Nullschätzer S, d.h. für alle Schätzer S mit $\mathbb{E}_\vartheta[S] = 0$ und $\mathrm{Var}_\vartheta[S] < \infty$. für alle $\vartheta \in \Theta$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben sei eine Menge mit einer bekannten Zahl N von Elementen (Population), durchnummeriert von 1 bis N. Jedes Mitglied j der Population wird mit einer Eigenschaft a_j aus einer Menge V in Beziehung gesetzt (z.B. Einkommen, Fehlzeiten wegen Krankheit, gesammelte

Punkte in Übungsaufgaben...). Der Vektor $\big((1, a_1), (2, a_2), \ldots, (N, a_N)\big)$ ist unbekannt. Ziel ist es, Kenngrößen $\tau(a_1, \ldots, a_N)$ zu schätzen. Dazu werden n Elemente ohne Zurücklegen gezogen, und es wird angenommen, dass alle möglichen gezogenen n-Tupel gleich wahrscheinlich sind. Sei (I_j, Y_j) mit $Y_j = a_{I_j}$ das Ergebnis im j-ten Zug.

a) Zeigen Sie, dass das arithmetische Mittel $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j$ ein gleichmäßig bester Schätzer für $\bar{a} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i$ ist.

b) Verifizieren Sie die Gleichung

$$\mathrm{Var}[\overline{Y}] = \frac{N-n}{n(N-1)}\,\tau_2, \quad \text{mit } \tau_2 := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(a_i - \bar{a})^2,$$

und bestimmen Sie einen gleichmäßig besten Schätzer für τ_2.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass ein erwartungstreuer Schätzer der Form $T(Y_1, \ldots, Y_n)$, der symmetrisch in den Y_i ist und für den $\mathrm{Var}[T] < \infty$ gilt, ein gleichmäßig bester Schätzer ist.