Übungen zur Vorlesung „Mathematische Statistik“

Blatt 6

Abgabetermin: Mittwoch, 28.11.2018, bis 12.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1.
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\mathscr{M} = (\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), (\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta))$, wobei $\Theta \subseteq \mathbb{N}$ und $\mathbb{P}_\vartheta = U(\vartheta)$ die diskrete Gleichverteilung (Laplace-Verteilung) auf $\{1, 2, \ldots, \vartheta\}$ sei, d.h. $\mathbb{P}_\vartheta(\{k\}) = \frac{1}{\vartheta}$ für $1 \leq k \leq \vartheta$, und $\mathscr{M}^{\otimes n}$ das zugehörige Produktmodell.

a) Zeigen Sie, dass im Produktmodell die Statistik $\max_{1\leq k\leq n} X_k$ vollständig ist, falls $\Theta = \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

b) Sei a eine natürliche Zahl mit $a \geq 2$. Zeigen Sie, dass $\max_{1\leq k\leq n} X_k$ nicht vollständig ist, falls $\Theta = \{a, a+1, \ldots\}$, und bestimmen Sie eine suffiziente und vollständige Statistik für diesen Fall.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Seien $Y_1, \ldots, Y_N$ unabhängig binomialverteilt mit

$$P(Y_i = k) = \binom{n_i}{k} \left(\frac{1}{1 + e^{-\alpha+\beta x_i}}\right)^k \left(\frac{e^{-\alpha+\beta x_i}}{1 + e^{-\alpha+\beta x_i}}\right)^{n_i-k}$$

für $1 \leq i \leq N$. Dabei seien n_i und x_i bekannt, während α und β unbekannte Parameter sind. Zeigen Sie, dass die gemeinsame Verteilung von $(Y_1, \ldots, Y_N)$ eine exponentielle Familie bildet.

Bemerkung: Dieses Modell wird häufig in biometrischen Anwendungen gebraucht. Typischerweise ist dann x_i die Dosis eines Medikaments (oder eine geeignete Funktion der Dosis), die n_i Patienten verabreicht wird, und Y_i ist die Anzahl der Behandlungserfolge unter diesen n_i Patienten.

b) Sei $(\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta} = (\Gamma(\lambda, \beta))_{(\lambda,\beta)\in(0,\infty)\times(0,\infty)}$ die Familie der Gamma-Verteilungen mit Dichten

$$f_{\Gamma(\lambda,\beta)}(x) = \frac{\beta^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\, x^{\lambda-1}\, e^{-\beta x} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Zeigen Sie, dass die Gamma-Verteilungen eine zweiparametrige exponentielle Familie bilden.

c) Sei $(\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta} = (W(\lambda, \beta))_{(\lambda,\beta)\in(0,\infty)\times(0,\infty)}$ die Familie der Weibull-Verteilungen mit Dichten

$$f_{W(\lambda,\beta)}(x) = \lambda\beta\, x^{\beta-1}\, e^{-\lambda x^\beta} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Zeigen Sie, dass die Weibull-Verteilungen $(W(\lambda, \beta_0))_{\lambda\in(0,\infty)}$ mit festem, bekanntem β_0 eine einparametrige exponentielle Familie bilden, $(W(\lambda, \beta))_{(\lambda,\beta)\in(0,\infty)\times(0,\infty)}$ aber keine zweiparametrige exponentielle Familie ist.

(bitte wenden)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

$(X_1, \ldots, X_s)$ seien gemeinsam mutinomialverteilt nach

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_s = x_s) = \frac{n!}{\prod_{j=1}^s (x_j!)} \prod_{j=1}^s p_j^{x_j},$$

mit $x_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \le j \le s$, und $\sum_{j=1}^s x_j = n$. Dabei sei n bekannt, $p_1, \ldots, p_s$ dagegen seien unbekannte Parameter mit $p_j \in (0,1)$, $1 \le j \le s$, und $\sum_{j=1}^s p_j = 1$.

a) Zeigen Sie, dass die Familie der obigen Multinomialverteilungen eine mehrparametrige exponentielle Familie bildet und die zugehörige kanonische Statistik suffizient und vollständig ist.

b) Geben Sie einen erwartungstreuen Schätzer für die Kenngröße $p_1 p_2$ an.

HINWEIS: Eine Multinomialverteilung wie oben kann man dadurch erhalten, dass man n ununterscheidbare Kugeln unabhängig und zufällig nacheinander auf s Fächer verteilt, wobei die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel in einem Zug in Fach j landet, gerade p_j ist. x_j gibt dann an, wie viele der n Kugeln am Ende in Fach j liegen. Zerlegen Sie damit die X_j in Summen und basteln Sie sich einen geeigneten Schätzer aus den Summanden.

c) Bestimmen Sie nun durch Bedingen Ihres Schätzers an der in a) erhaltenen vollständigen und suffizienten Statistik wie im Satz von Lehmann-Scheffé den gleichmäßig besten erwartungstreuen Schätzer für $p_1 p_2$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\mathscr{M} = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), (\mathbb{P}_\vartheta = N(\mu, \sigma^2) : \vartheta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times (0, \infty)))$ die Familie der Normalverteilungen mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2. Zeigen Sie, dass es keinen erwartungstreuen, quadratintegrierbaren Schätzer $T(X)$ für σ^2 gibt.