Übungen zur Vorlesung „Mathematische Statistik"

Blatt 5

Abgabetermin: Mittwoch, 21.11.2018, bis 12.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1.
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Beweisen Sie Lemma 1.8.5 der Vorlesung.

b) Zeigen Sie: Sei $S : \Omega \to (E, \mathscr{E})$ eine suffiziente Statistik für das statistische Modell $\mathscr{M} = (\Omega, \mathscr{F}, (\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta))$ und $g : (E, \mathscr{E}) \to (E, \mathscr{E})$ eine bijektive, bimessbare Abbildung (d.h. g und g^{-1} sind messbar), dann ist auch $g(S)$ eine suffiziente Statistik für $\mathscr{M}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch nach $IG(\alpha, \beta)$ verteilt, wobei $IG(\alpha, \beta)$ eine *inverse Gammaverteilung* zu den Parametern $\alpha, \beta > 0$ mit Dichte

$$f_{IG(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-\alpha-1} e^{-\frac{\beta}{x}} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

sei und $\mathscr{M}^{\otimes n}$ mit $\mathscr{M} = (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), (IG(\alpha, \beta) : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+))$ das zugehörige Produktmodell. Bestimmen Sie eine (zweidimensionale) suffiziente Statistik für $\vartheta = (\alpha, \beta)$.

b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt nach einer verschobenen Exponentialverteilung $\mathrm{Exp}(\lambda, \mu)$ mit

$$f_{\mathrm{Exp}(\lambda,\mu)}(x) = \lambda\, e^{-\lambda(x-\mu)} \cdot \mathbb{1}_{[\mu,\infty)}(x)$$

und $\mathscr{M}^{\otimes n}$ mit $\mathscr{M} = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{Exp}(\lambda, \mu) : (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}))$ das Produktmodell.

i) Zeigen Sie, dass $\min(X_1, \ldots, X_n)$ eine suffiziente Statistik für μ ist, falls der Parameter λ bekannt ist.

ii) Finden Sie eine eindimensionale, suffiziente Statistik für λ, falls μ bekannt ist.

iii) Finden Sie eine zweidimensionale suffiziente Statistik für (λ, μ).

Aufgabe 3 (4+2 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch Poisson-verteilte Zufallsvariablen und $\mathscr{M}^{\otimes n}$ mit $\mathscr{M} = (\mathbb{N}_0, \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0), \mathrm{Pois}(\vartheta) : \vartheta \in \mathbb{R}_+))$ das zugehörige Produktmodell.

a) Zeigen Sie, dass $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ eine vollständige und suffiziente Statistik für ϑ ist.

b) *Bonusaufgabe – 2 Extrapunkte*: Zeigen Sie die Suffizienz von $\sum_{i=1}^n X_i$, ohne Satz 1.8.16 der Vorlesung zu verwenden!

c) Zeigen Sie, dass $S(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ der eindeutige gleichmäßig beste Schätzer für $\tau(\vartheta) = \vartheta$ ist.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch nach $\mathbb{P}_\vartheta$ verteilte Zufallsvariablen, wobei

$$\mathbb{P}_\vartheta(X_1 = x) = \left(\frac{\vartheta}{2}\right)^{|x|}(1-\vartheta)^{1-|x|}, \quad x \in \{-1, 0, 1\},$$

und $\mathscr{M}^{\otimes n}$ mit $\mathscr{M} = (\{-1,0,1\}, \mathfrak{P}(\{-1,0,1\}), (\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in (0,1))$ das zugehörige Produktmodell sei. Untersuchen Sie die beiden Schätzer $T_1(X) = X_1$ und $T_2(X) = |X_1|$ auf Vollständigkeit und bestimmen Sie den gleichmäßig besten erwartungstreuen Schätzer für $\tau(\vartheta) = \vartheta$.