Übungen zur Vorlesung „Mathematische Statistik“

Blatt 4

Abgabetermin: Mittwoch, 14.11.2018, bis 12.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1.
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass im Binomialmodell $\mathscr{M} = (\{0,1,\ldots,n\},\mathfrak{P}(\{0,\ldots,n\}),\mathbb{P}_\vartheta = \mathrm{Bi}(n,\vartheta) : \vartheta \in (0,1))$ eine Kenngröße $\tau(\vartheta)$ genau dann erwartungstreu schätzbar ist, wenn $\tau(\vartheta)$ ein Polynom in ϑ vom Grad $\leq n$ ist.

Hinweise: Hierzu benötigen Sie keine Eigenschaften exponentieller Familien. Schreiben Sie stattdessen auf, wie der Erwartungswert $\mathbb{E}_\vartheta[T]$ im vorliegenden Modell genau aussieht. Für die Rückrichtung genügt es, Monome $\tau(\vartheta) = \vartheta^m$ zu betrachten. Ferner kann die Transformation $\theta = \frac{\vartheta}{1-\vartheta}$ und ein Koeffizientenvergleich der entstehenden Reihen hilfreich sein.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

In Aufgabe 3 c) vom letzten Übungsblatt haben Sie gesehen, dass im Exponentialverteilungsmodell $\mathscr{M} = (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mathbb{P}_\vartheta = \mathrm{Exp}(\vartheta) : \vartheta \in (0,\infty))$ bzw. im zugehörigen Produktmodell $\mathscr{M}^{\otimes n}$ die Varianz $\mathrm{Var}_\vartheta[T]$ des dort erhaltenen erwartungstreuen Schätzers T für $\tau(\vartheta) = \vartheta$ die Cramer-Rao-Schranke nicht erreicht. Zeigen Sie nun allgemeiner, dass es in diesem Modell (bzw. im Produktmodell) keinen gleichmäßig besten erwartungstreuen Schätzer für $\tau(\vartheta) = \vartheta$ geben kann.
Ist im Produktmodell das arithmetische Mittel der Beobachtungen ein gleichmäßig bester erwartungstreuer Schätzer für den Erwartungswert? Gibt es neben dem Erwartungswert überhaupt noch eine weitere Kenngröße $\tau(\vartheta)$, für die ein gleichmäßig bester erwartungstreuer Schätzer existieren kann?

Aufgabe 3 (5 Punkte)

a) Begründen Sie, warum Gleichverteilungen der Form $(\mathrm{UC}(0,\vartheta))_{\vartheta\in(0,\infty)}$ sowie $(\mathrm{UC}(\vartheta+a,\vartheta+b))_{\vartheta\in\mathbb{R}}$ mit bekannten $a < b \in \mathbb{R}$ keine exponentiellen Familien sein können.

b) Sei $(\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\mathbb{R}}$ die Familie der Laplace-Verteilungen mit Dichten
$$f_\vartheta(x) = \frac{1}{2}\,e^{-|x-\vartheta|}.$$
Zeigen Sie, dass diese Verteilungen keine exponentielle Familie bilden.

c) Es sei $(\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}$ eine exponentielle Familie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit kanonischer Statistik T und X eine nach $\mathbb{P}_\vartheta$ verteilte Zufallsvariable für ein $\vartheta \in \Theta$. Bestimmen Sie die Verteilung Q_ϑ von $T(X)$ und entscheiden Sie, ob auch die Familie $(Q_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}$ eine exponentielle Familie ist.

Hinweis: Unterscheiden Sie zwischen diskreten und stetigen Verteilungen $\mathbb{P}_\vartheta$ und betrachten Sie beide Fälle separat.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Sei $(\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta} = (G(\beta,\mu))_{(\beta,\mu)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}}$ die Familie der *Gumbel-Verteilungen*, die die Verteilungsfunktionen

$$F_{(\beta,\mu)}(x) = e^{-e^{-\frac{1}{\beta}(x-\mu)}}$$

besitzen. Untersuchen Sie (für festes $n \in \mathbb{N}$), ob die folgenden Familien von Produktmaßen

i) $(G(\beta,\mu_0)^{\otimes n})_{\beta\in(0,\infty)}$ mit bekanntem, festem μ_0,

ii) $(G(\beta_0,\mu)^{\otimes n})_{\mu\in\mathbb{R}}$ mit bekanntem, festem β_0,

exponentielle Familien sind.

b) Sei $(\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta} = (R(\vartheta))_{\vartheta\in(0,\infty)}$ die Familie der *Rayleigh-Verteilungen*, die die Dichten

$$f_{R(\vartheta)}(x) = \frac{x}{\vartheta}\, e^{-\frac{x^2}{2\vartheta}}\, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

besitzen. Verwenden Sie Satz 1.7.7 der Vorlesung, um $\mathbb{E}_\vartheta[X^2]$ für eine Rayleigh-verteilte Zufallsvariable $X \sim R(\vartheta)$ zu bestimmen.