# Übungen zur Vorlesung „Mathematische Statistik“

## Blatt 3

**Abgabetermin:** Mittwoch, 07.11.2018, bis 12.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1.
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

**Aufgabe 1** (4 Punkte)

Betrachten Sie das statistische Modell $\mathscr{M} = \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), (\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \mathbb{R})\big)$, wobei $(\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \mathbb{R}) = (\mathrm{UC}(\vartheta, \vartheta+1) : \vartheta \in \mathbb{R})$ die Familie von Gleichverteilungen über dem Intervall $(\vartheta, \vartheta+1)$ sei. $T_1(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{2}$ und $T_2(X) = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ seien Schätzer für $\tau(\vartheta) = \vartheta$ im zugehörigen $n$-fachen Produktmodell $\mathscr{M}^{\otimes n}$. Untersuchen Sie, ob $T_1$ und $T_2$ erwartungstreue Schätzer sind, und berechnen Sie für beide Schätzer den systematischen Fehler $\mathbb{B}_\vartheta(T_i)$, die Varianz $\mathrm{Var}_\vartheta[T_i]$ und den mittleren quadratischen Fehler $\mathbb{F}_\vartheta(T_i)$.

**Aufgabe 2** (2 Punkte)

Sei $\mathscr{M} = \big(\mathbb{N}_0, \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0), (\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in (0,\infty))\big)$, wobei $(\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in (0,\infty)) = (\mathrm{Pois}(\vartheta) : \vartheta \in (0,\infty))$ die Familie der Poisson-Verteilungen sei. Zeigen Sie, dass im $n$-fachen Produktmodell $\mathscr{M}^{\otimes n}$ der Schätzer $T(X) = \big(1 + \frac{1}{n}\big)^{\sum_{i=1}^n X_i}$ erwartungstreu für $\tau(\vartheta) = e^\vartheta$ ist, und berechnen Sie den mittleren quadratischen Fehler $\mathbb{F}_\vartheta(T)$.

**Aufgabe 3** (6 Punkte)

Sei $\mathscr{M} = \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), (\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in (0,\infty))\big)$, wobei $(\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in (0,\infty))$ die Familie der Exponentialverteilungen $\mathrm{Exp}(\vartheta)$ sei, die die Dichten

$$f_\vartheta(x) = \vartheta\, e^{-\vartheta x}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

besitzen.

a) Zeigen Sie, dass im $n$-fachen Produktmodell $\mathscr{M}^{\otimes n}$ der Maximum-Likelihood- und der Momentenschätzer für $\tau(\vartheta) = \vartheta$ übereinstimmen.

b) Ist der Maximum-Likelihood-Schätzer für $\vartheta$ erwartungstreu? Falls nicht, geben Sie anhand Ihrer Ergebnisse einen erwartungstreuen Schätzer für $\vartheta$ an.

   Hinweis: Im $n$-fachen Produktmodell ist $\sum_{i=1}^n X_i$ Gamma-verteilt mit Parametern $n$ und $\vartheta$, d.h. $\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n,\vartheta)$ mit $f_{\Gamma(n,\vartheta)}(x) = \frac{\vartheta^n}{(n-1)!}\, x^{n-1}\, e^{-\vartheta x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$.

c) Untersuchen Sie, ob die Varianz $\mathrm{Var}_\vartheta[T]$ des erwartungstreuen Schätzers $T$ für $\vartheta$ die Cramer-Rao-Schranke erreicht oder nicht.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 1.6.10 (a) der Vorlesung.