Übungen zur Vorlesung „Mathematische Statistik“

Blatt 2

Abgabetermin: Mittwoch, 31.10.2018, bis 12.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1.
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachte das statistische Modell $\mathscr{M} = \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), (\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in (0,\infty))\big)$, wobei $(\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in (0,\infty))$ die Familie der *Laplace-Verteilungen* sei, die die Dichten

$$f_\vartheta(x) = \frac{\vartheta}{2} e^{-\vartheta|x|}$$

besitzen. Eine Stichprobe $X = (X_1, \dots, X_n) \in \Omega^n$ aus dem Stichprobenraum des zugehörigen Produktmodells $\mathscr{M}^{\otimes n}$ besteht dann aus n unabhängigen, identisch nach $\mathbb{P}_\vartheta$ verteilten Zufallsvariablen. Bestimmen Sie einen Momentenschätzer für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X_1 > c)$ für ein beliebiges, aber festes $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachte das statistische Modell $\mathscr{M} = \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), (\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta)\big)$, wobei $\mathbb{P}_\vartheta = \mathrm{UC}(a,b)$ mit $\vartheta = (a,b) \in \Theta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$ die Familie der Gleichverteilungen sei. Berechnen Sie zunächst $\mathbb{E}_\vartheta[X]$ und $\mathrm{Var}_\vartheta[X]$ und geben Sie, darauf aufbauend, einen Momentenschätzer für den Parameter $\vartheta = (a,b)$ an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 1.4.5 der Vorlesung.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Betrachte das statistische Modell $\mathscr{M} = \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), (\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in (0,\infty))\big)$, wobei $(\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in (0,\infty))$ eine Familie von *Gamma-Verteilungen* mit Dichten

$$f_\vartheta(x) = \frac{\vartheta^3}{2} x^2 e^{-\vartheta x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

sei. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer im zugehörigen n-fachen Produktmodell $\mathscr{M}^{\otimes n}$ und zeigen Sie, dass dieser (stark) konsistent ist.