Übungen zur Vorlesung „Mathematische Statistik“

Blatt 1

Abgabetermin: Mittwoch, 24.10.2018, bis 12.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1.
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 1.1.8 der Vorlesung.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es seien $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$. Wir setzen

$$Y := \max\{X_1, \dots, X_n\}.$$

Zeigen Sie:

a) Die Verteilungsfunktion von Y ist gegeben durch

$$F_Y(x) = F_X(x)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

b) Falls die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ absolutstetig mit Dichte $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ sind, so ist auch Y absolutstetig mit Dichte f_Y, gegeben durch

$$f_Y(x) = nF_X(x)^{n-1} f_X(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

c) Für $X_1 \sim \mathrm{UC}(0, \vartheta)$ gilt

$$F_Y(x) = \frac{x^n}{\vartheta^n} \mathbb{1}_{(0,\vartheta)}(x) + \mathbb{1}_{[\vartheta,\infty)}(x).$$

d) Außerdem gilt

$$f_Y(x) = \frac{n}{\vartheta^n} x^{n-1} \mathbb{1}_{(0,\vartheta)}(x).$$

e) Folgern Sie mit den Annahmen und Notationen von Beispiel 1.1.13 der Vorlesung, dass

$$\mathbb{E}_\vartheta[M] = \frac{n}{n+1}\vartheta.$$

Zeigen Sie außerdem, dass der Schätzer $L(x) = 2\bar{x}$ erwartungstreu ist.

(bitte wenden)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Auf einem Obststand am Münstermarkt liegen insgesamt N Apfelsinen, von denen ϑ faul sind. Sie kaufen an diesem Stand $n \leq N$ zufällig ausgewählte Apfelsinen. Ihre Stichprobe/Beobachtung x sei dabei die Anzahl der faulen Apfelsinen unter den n gekauften.

a) Formulieren Sie das zugehörige statistische Modell (Stichprobenraum, Algebra der Beobachtungen, Parameterraum sowie die explizite Familie $\mathbb{P}_\vartheta$).

b) Zeigen Sie, dass $T(x) = \frac{Nx}{n}$ ein erwartungstreuer Schätzer für ϑ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben sei das Binomialmodell aus Beispiel 1.1.10 der Vorlesung. Bestimmen Sie einen erwartungstreuen Schätzer $T(x)$ für die Kenngröße $\tau : \Theta \to \mathbb{R}$, $\tau(\vartheta) = \vartheta(1 - \vartheta)$.