Übungen zur Vorlesung "Analysis I"

Blatt 8

Abgabetermin: Montag, 10.12.2018, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $s > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} = \infty & \text{falls } s \leq 1, \\ < \infty & \text{falls } s > 1. \end{cases}$$

Das bedeutet, dass die Reihe nur für $s > 1$ konvergiert. Sie ist auch als *Riemann'sche Zetafunktion* bekannt.

Hinweis: Sie kennen den Spezialfall $s = 1$ aus der Vorlesung. Schätzen Sie für die Konvergenz die Summe $\sum_{n=1}^{2^N-1} \frac{1}{n^s}$ geschickt durch die geometrische Summe ab. Ausschreiben dieser Summe kann dabei hilfreich sein.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt[n]{3} - 1), \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} 2^{-3n-1}.$$

Hinweis: Sie dürfen $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ verwenden, wie es in Aufgabe 4 gezeigt wird.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist es, das folgende Resultat zu beweisen: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone und beschränkte Folge, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent.
Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie, dass für reelle Zahlen $a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots, b_n$ gilt, dass

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}),$$

wobei $A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$ für $1 \leq k \leq n$ und $A_0 = 0$ sowie $b_{n+1} \in \mathbb{R}$ beliebig.

(b) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent ist, falls die Folge $(A_n b_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} A_n (b_n - b_{n+1})$ konvergieren.

(c) Folgern Sie nun mithilfe von Aufgabenteil (b) die Behauptung.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, dass $\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}$ für $0 \leq k \leq n$ gilt.