Übungen zur Vorlesung
"Analysis I"

Blatt 7

Abgabetermin: Montag, 03.12.2018, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

monoton fallend ist.
Bemerkung: Sie wissen aus der Vorlesung, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ monoton wächst (was man ganz analog zeigt), und dass beide gegen die Euler'sche Zahl e konvergieren.
Hinweis: Die Bernoullische Ungleichung kann hilfreich sein.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass die *Teleskopreihen*

$$\sum_{n=2}^{\infty}(a_n - a_{n-1}) \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$$

genau dann konvergent sind, wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = a < \infty$. Bestimmen Sie ferner ihren Grenzwert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{4^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, ist auch $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n a_n$ konvergent.

(b) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n a_n$ absolut.