Übungen zur Vorlesung
"Analysis I"

Blatt 6

Abgabetermin: Montag, 26.11.2018, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie folgende Resultate für reelle Folgen:

(a) Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = a$, sowie $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

(b) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, so ist auch $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert von

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{n}}}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, sodass ein $C > 0$ und ein $A \in (0,1)$ existiert mit

$$|a_{n+1} - a_n| \leq CA^n.$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen über reellwertige Folgen:

(a) Für jede Cauchyfolge sind auch alle Teilfolgen dieser Folge Cauchyfolgen.

(b) Eine Folge ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn jede Teilfolge der Folge eine Teilfolge besitzt, die eine Cauchyfolge ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Für zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ sind das arithmetische Mittel $A(x,y)$ und das geometrische Mittel $G(x,y)$ definiert als

$$A(x,y) := \frac{x+y}{2} \quad \text{und} \quad G(x,y) := \sqrt{xy}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für $x, y > 0$ und $x < y$ gilt: $x < G(x,y) < A(x,y) < y$.

Für positive reelle Zahlen $a < b$ seien nun Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_1 = a,\ b_1 = b \quad \text{und} \quad a_{n+1} = G(a_n, b_n),\ b_{n+1} = A(a_n, b_n).$$

(b) Zeigen Sie, dass es sich bei $I_n = [a_n, b_n]$ um eine Intervallschachtelung handelt.

(c) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren und dass $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Dieser Grenzwert wird *arithmetisch-geometrisches Mittel* genannt.