Übungen zur Vorlesung "Analysis I"

Blatt 4

Abgabetermin: Montag, 12.11.2018, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Analog zum Summenzeichen $\sum$ schreiben wir das Produkt von Zahlen als

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n.$$

Zeigen Sie, dass für natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ und nicht-negative reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die folgende Ungleichung gilt:

$$m \cdot \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \geq m \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt *Primzahl*, wenn $n > 1$ und aus $n = k \cdot l$ mit $k, l \in \mathbb{N}$ folgt, dass $k = 1$ oder $l = 1$. Zeigen Sie:

(a) Ist eine Zahl der Gestalt $M = 2^n - 1$ eine Primzahl, dann ist n eine Primzahl.

(b) Ist eine Zahl der Gestalt $F = 2^n + 1$ eine Primzahl, dann muss n eine Zweierpotenz sein, das heißt $n = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

HINWEIS: Nutzen Sie die geometrische Summenformel.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{N}$ die Folge $(n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ über alle Grenzen wächst.

(b) Geben Sie Beispiele für reelle Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ über alle Grenzen wächst, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist und

   (i) $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ über alle Grenzen wächst.

   (ii) $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

   (iii) $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen c konvergiert, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine vorgegebene Zahl ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Prüfen Sie, ob ein Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert und bestimmen Sie diesen gegebenenfalls, wobei:

(a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

(b) $a_n = \frac{5n^3+7n+13}{10n^3+4}$.

(c) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

(d) $a_n = (b_n+3)^2 - 12$ für eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} b_n = 3$.