Übungen zur Vorlesung "Analysis I"

Blatt 2

Abgabetermin: Montag, 29.10.2018, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass man bei den Körperaxiomen auf die Forderung nach Eindeutigkeit der neutralen Elemente und der Inversen hätte verzichten können, genauer:

(a) Gibt es 0_1 und 0_2, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, $x + 0_1 = x$ und $x + 0_2 = x$, so ist $0_1 = 0_2$.

(b) Gibt es 1_1 und 1_2, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, $x \cdot 1_1 = x$ und $x \cdot 1_2 = x$, so ist $1_1 = 1_2$.

(c) Sei $x \in \mathbb{R}$ und gelte für $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, dass $x + y_1 = 0 = x + y_2$. Dann ist $y_1 = y_2$.

(d) Sei $x \in \mathbb{R}$ und gelte für $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, dass $x \cdot y_1 = 1 = x \cdot y_2$. Dann ist $y_1 = y_2$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass folgende Ungleichungen für alle reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gelten:

(a) Die Dreiecksungleichung: $|a + b| \leq |a| + |b|$.

(b) Die verschärfte Dreiecksungleichung: $||a| - |b|| \leq |a + b|$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie Supremumg und Infimum, sowie Maximum und Minimum der folgenden Mengen, falls sie existieren und begründen Sie gegebenenfalls, wieso dies nicht der Fall ist:

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x < 9\} \subset \mathbb{R}$.

(b) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, 4, \ldots\right\} \subset \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien $M, N \subset \mathbb{R}$ nichtleere Teilmengen der reellen Zahlen.

(a) Zeigen Sie, dass aus $M \subset N$ folgt, dass $\sup M \leq \sup N$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\sup(M \cup N) = \max\{\sup M, \sup N\}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $\sup(M \cap N) \leq \min\{\sup M, \sup N\}$ gilt.

(d) Geben Sie ein Beispiel für M und N, sodass in (c) keine Gleichheit gilt.