Übungen zur Vorlesung "Analysis I"

Blatt 14

Abgabetermin: Montag, 04.02.2019, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Wie in der Vorlesung sei $\log_a(x)$ die Umkehrfunktion von $a^x := \exp(x \log(a))$.

a) Zeigen Sie, dass $\log_a$ stetig auf $\mathbb{R}_+$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$.

c) Beweisen Sie, dass $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $\log(a^x) = x \log(a)$ und $(a^x)^y = a^{xy}$.

d) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion von $f(x) = \exp(a^x)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ in einem inneren Punkt $\xi \in [a, b]$ differenzierbar, so gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi - h)}{2h} = f'(\xi).$$

(b) Kann man aus der Existenz des Grenzwerts auf der linken Seite von Aufgabenteil (a) auf die Differenzierbarkeit in ξ schließen?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ und finden Sie, falls vorhanden, kritische Punkte:

(a) $f(x) = x^\alpha \log(x)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) $f(x) = x^x$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Eine differenzierbare Funktion $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig genau dann wenn die Ableitung f' beschränkt ist, d.h. $|f'(x)| \leq L$ für alle $x \in S$ und geeignetes L gilt.

(b) Eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit stetiger Ableitung f' ist Lipschitz-stetig.