Übungen zur Vorlesung "Analysis I"

Blatt 13

Abgabetermin: Montag, 28.01.2019, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Folgern Sie aus dem Zwischenwertsatz:

(a) Jedes Polynom $P(x) = x^n - a$ mit $a > 0$ hat eine positive Nullstelle.

(b) Jede stetige Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f([a, b]) \subset [a, b]$ besitzt einen Fixpunkt x^*, das heißt es gilt $f(x^*) = x^*$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(q) = q^2$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass dann schon $f(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Gibt es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, sodass die Gleichung

$$f(x) = c$$

für alle $c \in \mathbb{R}$ genau zwei Lösungen besitzt? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und injektive Funktion mit $f(a) < f(b)$. Zeigen Sie:

(a) Für $a < \xi < b$ gilt $f(a) < f(\xi) < f(b)$.

(b) f ist auf $[a, b]$ streng monoton wachsend.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $S \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante* L, falls

$$\big|f(x) - f(x')\big| \leq L|x - x'| \qquad \text{für alle } x, x' \in S.$$

(a) Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion stetig ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine stetige, jedoch nicht Lipschitz-stetige Funktion.

(c) Es sei $S' \subset \mathbb{R}$ eine weitere Teilmenge und $g : S' \longrightarrow S$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass für f und g Lipschitz-stetig auch die Verkettung $f \circ g$ Lipschitz-stetig ist.