Übungen zur Vorlesung "Analysis I"

Blatt 12

Abgabetermin: Montag, 21.01.2019, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig im Punkt $x_0 \in S$ ist, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap S$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind und beweisen Sie Ihre Antwort! Es seien dazu $f_1, f_2, ... : S \longrightarrow \mathbb{R}$ auf ganz S stetige Funktionen.

(a) Das Maximum $(f_1 \vee f_2)(x) := \max\{f_1(x), f_2(x)\}$ ist stetig auf S.

(b) Ist für jedes $x \in S$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, so ist die Funktion

$$g(x) := \sup\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots\}$$

eine stetige Funktion auf S.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in S$ stetige Funktion, sowie $f(x_0) > c$ für vorgegebenes $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass eine δ-Umgebung $U_\delta(x_0)$ von x_0 existiert, sodass $f(x) > c$ für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap S$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $a < b$ und $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ eine wachsende (d.h. $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$) und stetige Funktion. Definiere die *Iterationsfolge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$x_{n+1} := f(x_n) \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

wobei $x_0 \in [a, b]$ beliebig gewählt sei. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton gegen einen Fixpunkt x^* von f konvergiert. Fixpunkt bedeutet dabei, dass $f(x^*) = x^*$ gilt.