Übungen zur Vorlesung
“Analysis I“

Blatt 11

Abgabetermin: Montag, 14.01.2019, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen. Zeigen Sie, dass für die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ von A gilt, dass

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{A' \supset A \\ A' \text{abgeschlossen}}} A'.$$

Mit anderen Worten, die abgeschlossene Hülle von A ist der Schnitt aller abgeschlossenen Mengen, die A enthalten.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Grenzwert einer Funktion $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in H(S)$ eindeutig bestimmt ist, falls er existiert.
Gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, falls $x_0 \in S$ liegt?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte an der Stelle x_0 und gilt

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x),$$

so existiert der Grenzwert von f an der Stelle x_0 und stimmt mit $\lim_{x \to x_0+0} f(x)$ bzw. $\lim_{x \to x_0-0} f(x)$ überein.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Untersuchen Sie für die folgenden Funktionen, ob der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert und bestimmen Sie ihn gegebenenfalls:

(a) $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^3+x^2-x-1}{x+1}$ in $x_0 = 1$,

(b) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^3-1}{(x-1)^3}$ in $x_0 = 1$,

(c) $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ in $x_0 = 2$,

(d) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$ in $x_0 = 0$.