Übungen zur Vorlesung "Analysis I"

Blatt 10

Abgabetermin: Montag, 07.01.2019, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Doppelreihen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

$$\text{(a)}\ \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{m^n}, \qquad \text{(b)}\ \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{n+k}}{3^n}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für eine reelle Zahl x definieren wir $x^+ := \max\{x, 0\}$ und $x^- := -\min\{x, 0\}$. Man beachte dabei, dass $x^- \geq 0$ gilt. Es sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, sodass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, jedoch nicht absolut konvergent ist. Zeigen Sie, dass die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

über jede Grenze wachsen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen ist.

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass ein Intervall (a, b) mit $a < b$ überabzählbar ist. Der Beweis der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ kann dabei hilfreich sein.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Eine Menge $U \subset \mathbb{R}$ heißt *Umgebung* von x, falls es ein $\epsilon > 0$ gibt, sodass die ϵ-Umgebung $B_\epsilon(x)$ Teilmenge von U ist. Zeigen Sie:

(a) Ist U ein Umgebung von $x \in \mathbb{R}$ und $U \subset U'$, so ist auch U' eine Umgebung von x.

(b) Ist $x \in \mathbb{R}$ und sind $U_1, U_2, \ldots U_n$ Umgebungen von x, so ist auch $\bigcap_{k=1}^{n} U_k$ eine Umgebung von x.

(c) Es sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Menge, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine A-wertige Folge und $a \in A$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ genau dann gilt, wenn jede Umgebung U von a alle Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bis auf diejenigen mit $n < N_U$ für ein $N_U \in \mathbb{N}$ enthält.

(bitte wenden)

Aufgabe 5 (4 Bonuspunkte)

Eine Schnecke ist in einen 4m tiefen Brunnen gefallen. Sie versucht nun, wieder herauszuklettern. Dabei schafft sie am ersten Tag einen Meter. Am nächsten Tag wiederum legt sie eine Pause ein und kommt in zwei Etappen jeweils q (mit $0 < q < 1$) Meter vorwärts. Am dritten Tag schafft sie in drei Etappen je q^2 Meter, am vierten in vier Etappen q^3 Meter und so weiter. Wie groß muss q mindestens sein, damit sie den Brunnenrand in endlicher Zeit erreicht?
Hinweis: Das Cauchyprodukt kann hier hilfreich sein.

Aufgabe 6 (4 Bonuspunkte)

Beweisen Sie: Ist eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, aber nicht absolut konvergent und $a \in \mathbb{R}$ beliebig, dann existiert eine Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sodass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = a.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Bijektion

$$\sigma(1) := \begin{cases} k_1, & \text{falls } a_1 \geq 0, \\ l_1, & \text{falls } a_1 < 0, \end{cases}$$

$$\sigma(n+1) := \begin{cases} \inf\{k_m \mid k_m \neq \sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}, & \text{falls } \sum_{m=1}^{n} a_{\sigma(m)} \leq a, \\ \inf\{l_m \mid l_m \neq \sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}, & \text{falls } \sum_{m=1}^{n} a_{\sigma(m)} > a, \end{cases}$$

wobei $k_1, k_2, \ldots$ eine Aufzählung von $\{a_n \mid a_n \geq 0\}$ und $l_1, l_2, \ldots$ eine solche von $\{a_n \mid a_n < 0\}$ ist. Zeigen Sie insbesondere mithilfe von Aufgabe 2, dass es sich um eine Bijektion handelt.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten

und einen guten Start ins neue Jahr!