Übungen zur Vorlesung "Analysis I"

Blatt 9

Abgabetermin: Montag, 17.12.2018, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien X, Y und Z Mengen, sowie $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ Abbildungen.

(a) Zeigen Sie, dass $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ für jedes $C \subset Z$.

(b) Zeigen Sie, dass aus der Bijektivität von f und g folgt, dass auch $g \circ f$ bijektiv ist und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

(c) Kann $g \circ f$ bijektiv sein, ohne dass f und g bijektiv sind?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien X, Y Mengen und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Ferner seien $A_1, A_2 \subset X$ und $B_1, B_2 \subset Y$ Teilmengen. Zeigen Sie:

(a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(b) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. Finden Sie ein Beispiel für die strikte Inklusion.

(c) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(d) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei

$$\mathcal{C} := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist } \mathbb{Q}\text{-wertige Cauchyfolge}\}$$

die Menge aller $\mathbb{Q}$-wertigen Cauchyfolgen und

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \;:\Leftrightarrow\; (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge.}$$

(a) Zeigen Sie, dass die obige Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{C}$ ist.

Es sei weiter $\overline{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}} := \{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$.

(b) Zeigen Sie, dass eine bijektive Abbildung

$$f : \mathcal{C}/\sim := \{\overline{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

existiert. Sie dürfen dabei wie in der Vorlesung die eindeutige Existenz einer Dezimaldarstellung für jede reelle Zahl voraussetzen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Eine Menge paarweiser disjunkter, nichtleerer offener Intervalle ist höchstens abzählbar. Ein offenes Intervall ist dabei eine Menge $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

(b) Zwei Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$ mit $a < b$ und $c < d$ sind gleichmächtig.