Übungen zur Vorlesung "Wahrscheinlichkeitstheorie"

Wintersemester 2017/18, Zusatzblatt

Aufgabe 1

Es seien ν, μ, λ drei σ-endliche Maße auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\nu \ll \mu \ll \lambda$. Beweisen Sie die *Kettenregel* für Radon-Nikodym-Ableitungen:

$$\lambda\text{-fast sicher gilt} \quad \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\lambda}.$$

Aufgabe 2

Sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Verteilungsfunktion, d.h. rechtsseitig stetig und monoton wachsend mit $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 1 - \lim_{x\to\infty} F(x) = 0$. Wir definieren die *verallgemeinerte Inverse* $F^{-1}(u) := \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq u\}$. Zeigen Sie

a) F^{-1} ist monoton wachsend,

b) $F \circ F^{-1}(u) \geq u$ für alle $u \in [0,1]$,

c) $F^{-1} \circ F(x) \leq x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

d) für $u \in [0,1]$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt $F(x) \geq u$ genau dann, wenn $x \geq F^{-1}(u)$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Hinweis: Zentraler Grenzwertsatz.

Aufgabe 4

Es seien $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ unabhängige zum Parameter $\lambda = 1$ Poisson-verteilte Zufallsvariablen und $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$. Berechnen Sie für $n \to \infty$ den Grenzwert von

$$q_n := \mathbb{E}\Big[\Big(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\Big)^{-}\Big].$$

(bitte wenden)

Aufgabe 5

Es sei Y_λ eine zum Parameter λ Poisson-verteilte und N eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass für $\lambda \to \infty$

$$\frac{Y_\lambda}{\lambda} \xrightarrow{\mathcal{D}} 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{Y_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N.$$

Aufgabe 6

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $X_i \geq 0, \forall i$, mit $0 < \mu := \mathbb{E}[X_1] < \infty$ gegeben. Sei $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ und $N_t := \max\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}$. Zeigen Sie:

a) $N_t \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ $[\mathbb{P}]$.

b) $\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\mu}$ $[\mathbb{P}]$.

Aufgabe 7

Es seien X und Y zwei Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, wobei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \to \mathbb{N}$. Seien weiterhin

$$\mathbb{P}_n : \mathcal{A} \to [0,1],\ A \mapsto \mathbb{P}(A|Y = n) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \{Y = n\})}{\mathbb{P}(Y = n)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$e(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto \int_{\mathbb{R}} x \, d\mathbb{P}_n(x).$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X|Y] = e(Y)$.