Übungen zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitstheorie“

Wintersemester 2017/18, Blatt 13

Abgabetermin: 5.2.2018, bis 13:00 Uhr, Briefkästen in der Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Abgabe ist maximal zu zweit möglich.)

Aufgabe 49 (4 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ eine Unter-σ-Algebra. Zeigen Sie, dass die bedingte Erwartung gegeben $\mathcal{B}$ der majorisierten Konvergenz genügt. (Satz 2.96 e))

Aufgabe 50 (4 Punkte)

Es seien X und Y unabhängige, identisch verteilte und integrierbare reellwertige Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X|X+Y] = \frac{X+Y}{2}.$$

Aufgabe 51 (4 Punkte)

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei X eine zum Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariable. Für $t > 0$ sei $Y_t := \min\{X, t\}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X|Y_t] = X\mathbb{1}_{\{X<t\}} + \left(t + \frac{1}{\lambda}\right)\mathbb{1}_{\{X\geq t\}}.$$

Hinweis: Betrachten Sie ein Erzeugendensystem von $\sigma(Y_t)$.

Aufgabe 52 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für unabhängige, auf $[0, 1]$ uniform-verteilte Zufallsvariablen X, Y gilt, dass

$$\mathbb{E}[X \mid \max(X, Y)] = \tfrac{3}{4}\max(X, Y).$$