Übungen zur Vorlesung
"Wahrscheinlichkeitstheorie"

Wintersemester 2017/18, Blatt 12

Abgabetermin: 29.1.2018, bis 13:00 Uhr, Briefkästen in der Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Abgabe ist maximal zu zweit möglich.)

Aufgabe 45 (4 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ und $X_0, \ldots, X_n$ unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen heißt die Verteilung von

$$\frac{X_0}{\sqrt{(X_1^2 + \ldots + X_n^2)/n}}$$

t-Verteilung mit n Freiheitsgraden. Zeigen Sie, dass diese für $n \to \infty$ in Verteilung gegen die Standardnormalverteilung konvergiert.

Aufgabe 46 (4 Punkte)

Überprüfen Sie mit Hilfe charakteristischer Funktionen $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X$ in den folgenden Fällen:

a) $Y_n \sim \mathrm{Poi}(n)$, $X_n := \frac{Y_n - n}{\sqrt{n}}$ und $X \sim N(0,1)$.

b) $Y_n \sim \mathrm{geom}(p_n)$ mit $np_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda > 0$, $X_n := \frac{Y_n}{n}$ und $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

c) $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ mit $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu$ und $\sigma_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ sowie $X \sim \delta_\mu$.

Aufgabe 47 (4 Punkte)

Seien $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{R}^d$, $\mu = \mathbb{E}[X^{(n)}] \in \mathbb{R}^d$ der komponentenweise Erwartungswert und $C_{ij} = \mathrm{Cov}[X_i^{(n)}, X_j^{(n)}]$ die Einträge der positiv definiten Kovarianzmatrix $C \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Zeigen Sie für $S^{(n)} := \sum_{k=1}^n X^{(k)}$ und $X \sim N_d(0, C)$, dass

$$\frac{S^{(n)} - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X.$$

Hinweis: Die Dichte $f_{N_d(\mu,\Sigma)}$ einer d-dimensionalen Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}^d$ und positiv definiter Kovarianzmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ist gegeben durch

$$f_{N_d(\mu,\Sigma)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \det \Sigma}} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)\Big).$$

X ist genau dann $N_d(\mu, \Sigma)$-verteilt, wenn $t^\top X = \langle t, X\rangle \sim N_1(t^\top \mu, t^\top \Sigma t)$ für alle $t \in \mathbb{R}^d$.

(bitte wenden)

Aufgabe 48 (4 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $X, Y : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbare Abbildungen. Zeigen Sie:

Ist Y $\sigma(X)$-messbar, dann existiert eine Borel-messbare Abbildung $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ derart, dass $Y = f \circ X$.

Hinweis: Algebraische Induktion.