Übungen zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitstheorie“

Wintersemester 2017/18, Blatt 11

Abgabetermin: 22.1.2018, bis 13:00 Uhr, Briefkästen in der Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Abgabe ist maximal zu zweit möglich.)

Aufgabe 41 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass eine Familie von Normalverteilungen genau dann straff ist, wenn die Familie der Parameter beschränkt ist.

Aufgabe 42 (4 Punkte)

Sei φ die charakteristische Funktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und $t_0 \neq 0$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) $\varphi(t_0) = 1$.

b) $\varphi(u + mt_0) = \varphi(u)$ für alle $u \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{Z}$.

c) $\mathbb{P}(\{k\frac{2\pi}{t_0} : k \in \mathbb{Z}\}) = 1$.

Aufgabe 43 (4 Punkte)

Sei X eine reelle Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion φ_X und $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Für $\sigma > 0$ sei

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{\varphi_X(t) - 1}{t^2} = -\frac{\sigma^2}{2}.$$

Zeigen Sie: $\mathbb{E}[X] = 0$ und $\mathbb{E}[X^2] = \sigma^2$.

(bitte wenden)

Aufgabe 44 (4 Punkte)

a) Seien X, Y stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, f_Y die Lebesguedichte der Verteilung von Y und φ_X die charakteristische Funktion von X. Zeigen Sie, dass für die charakteristische Funktion des Produkts XY gilt

$$\varphi_{XY}(t) = \int \varphi_X(ty) f_Y(y) dy.$$

b) Die *Doppelexponentialverteilung* $DExp(\mu, \sigma)$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ ist gegeben durch die Lebesguedichte $f(x) = 1/(2\sigma) \exp(-|x - \mu|/\sigma)$. Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion der Doppelexponentialverteilung $DExp(\mu, \sigma)$ gegeben ist durch

$$\varphi_{DExp(\mu,\sigma)}(t) = e^{i\mu t} \frac{1}{1 + \sigma^2 t^2}.$$

c) Seien X_1, X_2, X_3, X_4 stochastisch unabhängige, $\mathcal{N}(0, 1)$-verteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass $X_1X_2 - X_3X_4$ doppelexponentialverteilt mit Parametern $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ ist.