Übungen zur Vorlesung
"Wahrscheinlichkeitstheorie"

Wintersemester 2017/18, Blatt 10

Abgabetermin: 15.1.2018, bis 13:00 Uhr, Briefkästen in der Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Abgabe ist maximal zu zweit möglich.)

Aufgabe 37 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass jedes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ schwacher Limes einer Folge von diskreten Wahrscheinlichkeitsmaßen ist.

Aufgabe 38 (4 Punkte)

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen, $X_1 \sim \mathrm{Exp}(1)$ und X habe die Verteilungsfunktion $F(x) = \exp(-e^{-x})$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

a) $\max\limits_{1 \le k \le n} X_k \overset{d}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $\max\limits_{1 \le k \le n} X_k - \log n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X$.

Aufgabe 39 (4 Punkte)

Seien X, X_n und Y_n Zufallsvariablen mit Werten in einem metrischen Raum (E, r). Dabei seien X_n und Y_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum definiert. Außerdem gelte, dass $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X$ und $r(X_n, Y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$. Zeigen Sie, dass dann auch

$$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X.$$

Hinweis: Satz 2.58 gilt auch, wenn man in ii) $\mathcal{F} = \{f : E \to \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt und Lipschitz-stetig}\}$ wählt. Das lässt sich dadurch nachvollziehen, dass die f_k, die im Beweisschritt ii) $\Rightarrow$ iv) verwendet werden, ebenfalls Lipschitz-stetig sind. Sie dürfen dies ohne weiteren Beweis benutzen.

Aufgabe 40 (4 Punkte)

Sei $(\mathbb{P}_i)_{i \in I}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) $(\mathbb{P}_i)_{i \in I}$ ist straff.

b) Für alle Projektionen $\pi_1, \ldots, \pi_d$ ist $((\pi_k)_* \mathbb{P}_i)_{i \in I}$ straff.