Übungen zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitstheorie“

Wintersemester 2017/18, Blatt 9

Abgabetermin: 8.1.2018, bis 13:00 Uhr, Briefkästen in der Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Abgabe ist maximal zu zweit möglich.)

Aufgabe 33 (4 Punkte)

Es sei $(\mu_n)_n$ eine Folge von endlichen Maßen auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$, die vage gegen ein endliches Maß μ konvergiert. Zeigen Sie $\mu(\mathbb{R}^d) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(\mathbb{R}^d)$. Nennen Sie außerdem ein Beispiel für eine vage konvergente Maßfolge (μ_n), für die $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(\mathbb{R}^d) \neq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(\mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 34 (4 Punkte)

Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine eindeutige Darstellung $n = 2^{k_n} + m_n$ mit $0 \leq m_n < 2^{k_n}$. Es sei $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ – das heißt, $\mathbb{P}$ hat Lebesgue-Dichte $\mathbb{1}_{[0,1]}$ – und außerdem

$$\text{🎁}_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto \begin{cases} k_n & \text{für } \frac{m_n}{2^{k_n}} \leq \omega \leq \frac{m_n+1}{2^{k_n}}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Folge der 🎁_n bezüglich $\mathbb{P}$ auf schwache, stochastische, fast sichere und $\mathcal{L}^p$-Konvergenz für $p \geq 1$ sowie auf gleichgradige Integrierbarkeit.

Aufgabe 35 (4 Punkte)

Seien 🎄 und 🎁_n für alle $n \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen, die nur Werte in $\mathbb{Z}$ annehmen. Zeigen Sie

$$\text{🎁}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \text{🎄} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall j \in \mathbb{Z} : \mathbb{P}(\text{🎁}_n = j) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(\text{🎄} = j).$$

Aufgabe 36 (4+5 Punkte)

Es sei 🎅 eine auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Weiter sei $X := \cos(2\pi\text{🎅})$ sowie $Y := \sin(2\pi\text{🎅})$. Zeigen Sie, dass X und Y unkorreliert aber nicht unabhängig sind.

Hinweis: Für die Bestimmung der Dichten, Varianzen sowie der gemeinsamen Dichte von X und Y können Sie jeweils einen Bonuspunkt erhalten.

(bitte wenden)

Weihnachtsaufgabe (4 Bonuspunkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit abzählbarem Ω. Weiterhin sei $(\text{🎁}_n) \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein stochastisch unabhängiges Mengensystem und $p_n := \mathbb{P}(\text{🎁}_n)$ für alle n. Zeigen Sie, dass dann

$$\sum_{n\geq 1} \min\{p_n, 1 - p_n\} < \infty.$$

Folgern Sie hieraus, dass es kein unabhängiges Mengensystem (🎁_n) auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum geben kann mit konstanter, nicht-trivialer Wahrscheinlichkeit – also $\mathbb{P}(\text{🎁}_n) = p \in (0,1)$ für alle n.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten

und einen guten Start ins neue Jahr!

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2017-18/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2017-18`