Übungen zur Vorlesung
"Wahrscheinlichkeitstheorie"

Wintersemester 2017/18, Blatt 8

Abgabetermin: 18.12.2017, bis 13:00 Uhr, Briefkästen in der Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Abgabe ist maximal zu zweit möglich.)

Aufgabe 29 (4 Punkte)

Geben Sie ein Beispiel für eine gleichgradig integrierbare Familie von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die keine integrierbare Majorante besitzt, d.h. $\mathbb{E}[\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n|] = \infty$.

Aufgabe 30 (4 Punkte)

a) In der Vorlesung Stochastik im letzten Jahr wurde gezeigt, dass eine Folge $(X_n)_{n\geq 2}$ von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit

$$\mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{2n\log n} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log n}.$$

dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügt. Zeigen Sie, dass Sie nicht dem starken Gesetz der großen Zahlen genügt.

b) Betrachten wir nun U uniform-verteilt auf $[0,1]$ und Zufallsvariablen $(Y_n)_{n\geq 2}$ mit

$$Y_n := n \cdot \mathbb{1}_{\{U > 1 - \frac{1}{2n\log(n)}\}} - n \cdot \mathbb{1}_{\{U < \frac{1}{2n\log(n)}\}}.$$

Dann gilt zwar $\mathbb{P}^{Y_n} = \mathbb{P}^{X_n}$ für alle n, aber die Y_n sind nicht unabhängig. Welchem der Gesetze großer Zahlen genügt die Folge der Y_n?

Hinweis: Zeigen Sie in a), dass aus der Gültigkeit des starken Gesetzes folgen würde, dass $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty}_{fs} 0$, und führen Sie dies zu einem Widerspruch.

(bitte wenden)

Aufgabe 31 (4 Punkte)

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastich unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X_n = n^2) = \mathbb{P}(X_n = -n^2) = \frac{1}{n^2} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{n^2}.$$

Zeigen Sie:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(X_n) = \infty.$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = 0\,[\mathbb{P}].$

Aufgabe 32 (4 Punkte)

Es sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion und $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Wir definieren $Z_n := \mathbb{1}_{\{Y_n < f(X_n)\}}$.

a) Zeigen Sie, dass $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\,dx\,[\mathbb{P}].$

b) Bestimmen Sie eine Zahl n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i - \int_0^1 f(x)\,dx\Big| \leq 0{,}01\right) \geq 0{,}95.$$

Hinweis: Verwenden Sie für den b)-Teil die Tschebyscheff-Ungleichung aus Proposition 2.15.