Übungen zur Vorlesung
"Wahrscheinlichkeitstheorie"

Wintersemester 2017/18, Blatt 7

Abgabetermin: 11.12.2017, bis 13:00 Uhr, Briefkästen in der Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Abgabe ist maximal zu zweit möglich.)

Aufgabe 25 (4 Punkte)

Es sei X exponential-verteilt zum Parameter $\lambda > 0$, $Y := \max\{X, 1\}$ und $Z_c = e^{-cX}$ für $c > 0$. Berechnen Sie die Werte $\mathbb{E}[Y]$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathbb{E}[Z_c]$, $\mathrm{Var}(Z_c)$ und $\mathrm{Cov}(Y, Z_c)$.

Aufgabe 26 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass eine Folge von Zufallsvariablen (X_n) auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ genau dann gleichgradig integrierbar ist, wenn

i) $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ und

ii) für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle n und alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(A) < \delta$ gilt

$$\int_A |X_n| d\mathbb{P} < \varepsilon.$$

Aufgabe 27 (4 Punkte)

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{n} = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$. Untersuchen Sie diese auf stochastische, $\mathbb{P}$-fast-sichere und $\mathcal{L}^p$-Konvergenz für alle $p \geq 1$. Ist $(X_n)_n$ gleichgradig integrierbar?

Aufgabe 28 (4 Punkte)

Seien $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}^{X_n} = \mathbb{P}^{Y_n}$ für alle n. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) $X_n \to_p 0 \Rightarrow Y_n \to_p 0$.

b) $X_n \to 0$ $[\mathbb{P}] \Rightarrow Y_n \to 0$ $[\mathbb{P}]$.

c) $X_n \to_{\mathcal{L}^1} 0 \Rightarrow Y_n \to_{\mathcal{L}^1} 0$.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2017-18/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2017-18`