Übungen zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitstheorie“

Wintersemester 2017/18, Blatt 6

Abgabetermin: 4.12.2017, bis 13:00 Uhr, Briefkästen in der Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Abgabe ist maximal zu zweit möglich.)

Aufgabe 21 (4 Punkte)

Die Faltungsformel aus Beispiel 1.140c) der Vorlesung gilt auch allgemeiner für Maße mit Dichten bezüglich anderer dominierender Maße als dem Lebesgue-Maß. Ist zum Beispiel μ das Zählmaß auf dem Messraum $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ (vgl. Bemerkung 1.137 und Aufgabe 18), lassen sich bekannte diskrete Verteilungen darstellen über eine Dichte bezüglich μ – eine sogenannte *Zähldichte*. Beispielsweise ist dann

$$f_{\mathrm{Poi}(\lambda)}(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\mathbb{1}_{\mathbb{N}_0}(k)$$

die Dichte der Poisson-Verteilung mit Parameter λ bezüglich des Zählmaßes.

a) Sei $f_{\mathrm{Geo}(p)}(k) = p(1-p)^{k-1}\mathbb{1}_{\mathbb{N}}(k)$ die Zähldichte der geometrischen Verteilung mit Parameter p. Berechnen Sie mit Hilfe der Faltungsformel die Zähldichte $f_{\mathrm{Geo}(p)*\mathrm{Geo}(q)}(k)$ der Faltung zweier geometrischer Verteilungen mit Parametern $p, q \in (0,1)$.

b) Sei $f_{\mathrm{NB}(r,p)}(k) = \binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}\mathbb{1}_{\{r,r+1,\dots\}}(k)$ die Zähldichte der negativen Binomial-Verteilung oder auch *Pascal-Verteilung* zu den Parametern $r \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$. Bestimmen Sie die Zähldichte $f_{\mathrm{NB}(r_1,p)*\mathrm{NB}(r_2,p)}(k)$ der Faltung zweier Pascal-Verteilungen mit Parametern r_1, p und r_2, p.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für alle $s, t, u \in \mathbb{N}$ mit $s + t \leq u$

$$\sum_{m=t}^{u-s}\binom{u-m-1}{s-1}\binom{m-1}{t-1} = \binom{u-1}{s+t-1}.$$

Aufgabe 22 (4 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie: Eine Familie $(X_i)_{i\in I}$ paarweise unabhängiger Zufallsvariablen ist unabhängig.

Hinweis: Die Familie heißt paarweise unabhängig, wenn für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ gilt, dass X_i und X_j unabhängig sind.

(bitte wenden)

Aufgabe 23 (4 Punkte)

Nennen Sie jeweils ein Beispiel und ein Gegenbeispiel von reellwertigen Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und einer Menge $A \in \mathcal{A}$ für die folgenden Identitäten:

a) $\mathbb{P}(\{\limsup_{n\to\infty} X_n \in A\}) = \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{X_n \in A\})$.

b) $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{X_n \in A\}) = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{X_n \in A\})$.

c) $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{X_n \in A\}) = \mathbb{P}(\{\limsup_{n\to\infty} X_n \in A\})$.

Aufgabe 24 (4+2 Punkte)

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von reellwertigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathcal{A}_n := \sigma(X_n)$ für alle n und $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Zeigen oder widerlegen Sie durch Gegenbeispiel, dass die folgenden Ereignisse terminale Ereignisse sind, also in der terminalen σ-Algebra liegen.

a) $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = 0\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$,

b) $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$,

c) $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = 0 \text{ für endlich viele } n \in \mathbb{N}\}$,

d) $\{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) = 0 \text{ für endlich viele } n \in \mathbb{N}\}$,

e) $\{\omega \in \Omega \mid (X_n(\omega))_n \text{ enthält eine monoton wachsende Teilfolge}\}$,

f) $\{\omega \in \Omega \mid \limsup_{n\to\infty} S_n(\omega) > \liminf_{n\to\infty} S_n(\omega)\}$.

Hinweis: Jeder Teil dieser Aufgabe gibt einen Punkt. Damit sind hier 2 Bonuspunkte möglich.