Übungen zur Vorlesung
"Wahrscheinlichkeitstheorie"

Wintersemester 2017/18, Blatt 5

Abgabetermin: 27.11.2017, bis 13:00 Uhr, Briefkästen in der Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Abgabe ist maximal zu zweit möglich.)

Aufgabe 17 (4 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ eine messbare Abbildung. Wir definieren für $k \in \mathbb{N}_0$ und $A \in \mathcal{A}$

$$\tilde{K}(k, A) := \begin{cases} \mathbb{P}(A \cap \{X = k\})/\mathbb{P}(\{X = k\}) & \text{für } \mathbb{P}(\{X = k\}) > 0, \\ \mathbb{P}(A) & \text{für } \mathbb{P}(\{X = k\}) = 0. \end{cases}$$

Zusätzlich sei $K(\omega, A) := \tilde{K}(X(\omega), A)$ für $\omega \in \Omega$ und $A \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie:

a) $\tilde{K} : \mathbb{N}_0 \times \mathcal{A} \to [0, 1]$ ist eine Markovkern von $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ nach $(\Omega, \mathcal{A})$.

b) $K : \Omega \times \mathcal{A} \to [0, 1]$ ist ein Markovkern von $(\Omega, \sigma(X))$ nach $(\Omega, \mathcal{A})$.

c) Für alle $A \in \mathcal{A}$ und $C \in \sigma(X)$ ist $\mathbb{E}[\mathbb{1}_C K(\cdot, A)] = \mathbb{P}(C \cap A)$.

Aufgabe 18 (4 Punkte)

Das Zählmaß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ sei definiert durch $\mu(A) = |A|$, falls A endlich ist, und $\mu(A) = \infty$ sonst. Zeigen Sie:

a) $\triangle := \{(x, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in [0, 1]\} \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$,

b) $\int_0^1 \int_0^1 \mathbb{1}_\triangle(x, y) \lambda(dx)\mu(dy) = 0$,

c) $\int_0^1 \int_0^1 \mathbb{1}_\triangle(x, y) \mu(dy)\lambda(dx) = 1$.

Widerspricht dies dem Satz von Fubini?

(bitte wenden)

Aufgabe 19 (4 Punkte)

Beweisen Sie mit Fubini die Regel der partiellen Integration. Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Lebesgue-integrierbare Funktionen, und für $x \in [a, b]$ seien

$$F(x) := \int_a^x f(y)dy \quad \text{und} \quad G(x) := \int_a^x g(y)dy.$$

Dann gilt:

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - \int_a^b G(x)f(x)dx.$$

Hinweis: Wenden Sie Fubini auf die Funktion $h : (x, y) \mapsto f(y)g(x)\mathbb{1}_E(x, y)$ an, mit $E = \{(x, y) \in [a, b]^2 : y < x\}$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass Fubini für Funktionen aus $\overline{\mathcal{Z}}_+$ auch ohne die Integrierbarkeitsvoraussetzung gilt.

Aufgabe 20 (4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Verteilungsklassen auf Faltungsstabilität.

a) $\{\mathcal{N}(0, \sigma^2) : \sigma^2 > 0\}$, die Klasse der Normalverteilungen mit Erwartungswert 0.

b) $\{\text{Exp}(\lambda) : \lambda > 0\}$, die Klasse der Exponentialverteilungen.

Hinweis: Eine Klasse M von Verteilungen heißt stabil unter Faltung, wenn für alle $\mu, \nu \in M$ gilt, dass $\mu * \nu \in M$.

Zur Erinnerung: Die oben genannten Verteilungen sind gegeben durch ihre Dichten

$$f_{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)}(x) = \left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \text{ und}$$

$$f_{\text{Exp}(\lambda)}(x) = \lambda \exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$