Übungen zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitstheorie“

Wintersemester 2017/18, Blatt 4

Abgabetermin: 20.11.2017, bis 13:00 Uhr, Briefkästen in der Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Abgabe ist maximal zu zweit möglich.)

Aufgabe 13 (4 Punkte)

Seien λ, μ und ν Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie:

a) Wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $A \in \mathcal{A}$ existiert mit $\mu(A) < \varepsilon$ und $\nu(A^c) < \varepsilon$, dann ist $\mu \perp \nu$.

b) Sind $\lambda \ll \mu$ und $\mu \perp \nu$, dann auch $\lambda \perp \nu$.

c) Wenn $\mu \ll \nu$ und $\mu \perp \nu$, muss schon $\mu \equiv 0$.

Aufgabe 14 (4 Punkte)

Es seien μ und ν zwei Maße auf dem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A})$ und ν endlich. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1) $\nu \ll \mu$.

2) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) \leq \delta$ auch $\nu(A) \leq \varepsilon$.

Aufgabe 15 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass zwei σ-endliche Maße μ, ν auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ genau dann übereinstimmen, wenn für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit kompakten Träger gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \, d\nu.$$

Aufgabe 16 (4 Punkte)

Es seien $\Omega = \mathbb{N}_0$, $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $p, q \in [0, 1]$, $\nu = \mathcal{B}(n, p)$ die Binomialverteilung mit Parametern n und p (also $\nu(\{0, \ldots, n\}^c) = 0$) und analog $\mu = \mathcal{B}(m, q)$. Untersuchen Sie, für welche Parameter eine Radon-Nikodym-Dichte existiert, und berechnen Sie diese.