Übungen zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitstheorie“

Wintersemester 2017/18, Blatt 3

Abgabetermin: 13.11.2017, bis 13:00 Uhr, Briefkästen in der Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Abgabe ist maximal zu zweit möglich.)

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichne

$$D_f := \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ ist unstetig in } x\}$$

die Menge der Unstetigkeitsstellen von f. Zeigen Sie, dass D_f eine Borelmenge ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $A_{k,n} := \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \exists y, z \in \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \text{ mit } |f(y) - f(z)| > \frac{1}{k}\right\}$ offen ist.

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f \in \overline{\mathcal{Z}}_+$ und $f\mu$ ein Maß mit Dichte f wie in Definition 1.86. Zeigen Sie mit algebraischer Induktion, dass für $f\mu$-integrierbare g gilt, dass

$$\int g \, d(f\mu) = \int (g \cdot f) d\mu.$$

Ist $\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}^1(f\mu)$?

Aufgabe 11 (4 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer, messbarer, reeller Funktionen auf Ω, die punktweise gegen eine Funktion $f : \Omega \to [0, \infty]$ konvergiert. Zeigen Sie, dass im Falle $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = 42$ auch f μ-integrierbar ist mit $\int f \, d\mu \leq 42$. Zeigen Sie ferner anhand eines Beispiels, dass $\int f \, d\mu$ jeden Wert in $[0, 42]$ annehmen kann.

Hinweis: Wählen Sie z.B. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{1}_{[0,1]} \cdot \lambda)$ und $f := c \cdot \mathbb{1}_{(0,1]}$ für vorgegebenes $c \in [0, 42]$.

Aufgabe 12 (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie, dass für alle messbaren Abbildungen $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt:

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty := \inf\{a \in \mathbb{R}_+ : \mathbb{P}(|f| \geq a) = 0\}.$$

Zeigen Sie ferner, dass für $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{1}_{[0,1]} \cdot \lambda)$ und $f(x) := \log(|\frac{1}{x}|)$ gilt: $\|f\|_p < \infty$ für alle $p \in \mathbb{N}$, aber $\|f\|_\infty = \infty$.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2017-18/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2017-18`