Übungen zur Vorlesung
"Wahrscheinlichkeitstheorie"

Wintersemester 2017/18, Blatt 2

Abgabetermin: 6.11.2017, bis 13:00 Uhr, Briefkästen in der Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Abgabe ist maximal zu zweit möglich.)

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $\mathcal{N}_\mu$ und $\tilde{\mathcal{A}}$ wie in Aufgabe 3 von Blatt 1 und $\tilde{\mu} : \tilde{\mathcal{A}} \to \bar{\mathbb{R}}_+, \tilde{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$ für $A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}_\mu$. Zeigen Sie, dass $\tilde{\mu}$ ein wohldefiniertes Maß auf $(\Omega, \tilde{\mathcal{A}})$ ist.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ der Ring der eindimensionalen Figuren. Für eine Menge $A \in \mathcal{F}$ definieren wir $\mu(A) := \left|A \cap \{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}\right|$, wobei $|\cdot|$ die Mächtigkeit einer Menge bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass μ ein nicht σ-endliches Prämaß auf $\mathcal{F}$ ist.

b) Geben Sie zwei verschiedene Fortsetzungen von μ zu einem Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ an.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass durch die Funktion

$$\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty],\ \mu^*(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}$ definiert wird.

b) Zeigen Sie, dass für alle $A \subset \mathbb{R}$ gilt:

$$A \subset \mathbb{R} \text{ ist } \mu^*\text{-messbar} \;\Leftrightarrow\; A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar.}$$

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $H_\alpha := \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = \alpha\}$ und λ^n das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie:

$$\lambda^n(H_\alpha) = 0$$

und folgern Sie hieraus, dass für jede Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$ gilt, dass $\lambda^n(H) = 0$.