Übungen zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitstheorie“

Wintersemester 2017/18, Blatt 1

Abgabetermin: 30.10.2017, bis 13:00 Uhr, Briefkästen in der Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Abgabe ist maximal zu zweit möglich.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Der Raum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller reellwertigen Folgen sei versehen mit der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{B}^{\mathbb{N}} := \bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_i$ der Borelschen σ-Algebren $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}$ auf $\mathbb{R}$ und a eine reelle Zahl. Welche der folgenden Mengen sind $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$-messbar?

$$A = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n > a\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } a\},$$

$$C = \Big\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\Big|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| > a\Big\}, \qquad D = \Big\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\Big|\; \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \text{ für mindestens ein } n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}$ auf $\mathbb{R}$ und $I = [0,1]$ bezeichne $\mathcal{B}^I$ die Produkt-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^I$ sowie $C := \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig }\}$ die Menge der stetigen Funktionen auf I. Zeigen Sie, dass $C \notin \mathcal{B}^I$.

Hinweis: Verwenden Sie Proposition 1.33 aus der Vorlesung.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\mathcal{N}_\mu := \{A \subset \Omega \mid \exists N \in \mathcal{A} : \mu(N) = 0, A \subset N\}$ das System aller Teilmengen von μ-Nullmengen. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}_\mu\}.$$

die von $\mathcal{A} \cup \mathcal{N}_\mu$ erzeugte σ-Algebra ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass jede σ-Algebra entweder endlich viele oder überabzählbar viele Elemente enthält.

Hinweis: Zu einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf einer Menge Ω und $\omega \in \Omega$ sei $M_\omega := \bigcap_{A\in\mathcal{A}\,:\,\omega\in A} A$.

Zeigen Sie, dass $\{M_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ eine disjunkte Zerlegung von Ω liefert, und nutzen Sie dies, um einen Widerspruch herzuleiten.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2017-18/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2017-18`