Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Vorlesungsskript

Stochastische Prozesse

apl. Prof. Dr. Stefan Tappe

Wintersemester 2017/18

Abteilung für Mathematische Stochastik

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlegende Begriffe

1.1 Stochastische Basen

Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 1.1.1. *Eine Familie $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ von Sub-σ-Algebren von $\mathscr{F}$ heißt eine Filtration, falls $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ für alle $0 \leq s \leq t$.*

Definition 1.1.2. *Es sei $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine Filtration.*

(a) Wir definieren die Familie $\mathbb{F}_- = (\mathscr{F}_{t-})_{t \in \mathbb{R}_+}$ durch $\mathscr{F}_{0-} := \mathscr{F}_0$ und

$$\mathscr{F}_{t-} := \sigma\Big(\bigcup_{s<t} \mathscr{F}_s \Big), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

(b) Wir definieren die Familie $\mathbb{F}_+ = (\mathscr{F}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ durch

$$\mathscr{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Definition 1.1.3. *Es sei $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine Filtration.*

(a) $\mathbb{F}$ heißt rechtsstetig, falls $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+}$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

(b) Ist $\mathbb{F}$ rechtsstetig, so nennen wir $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ eine stochastische Basis.

Lemma 1.1.4. *Es sei $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine Filtration.*

(a) $\mathbb{F}_-$ ist eine Filtration.

(b) $\mathbb{F}_+$ ist eine rechtsstetige Filtration.

(c) Es gilt $\mathscr{F}_{t-} \subset \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}_{t+}$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

(d) Es gilt $\mathscr{F}_{s+} \subset \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}_{u-}$ für alle $0 \leq s < t < u$.

Beweis. Übung. □

Korollar 1.1.5. *Es sei $\mathbb{F}$ eine Filtration. Dann ist $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}_+, \mathbb{P})$ eine stochastische Basis.*

Von nun an sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ eine stochastische Basis.

Definition 1.1.6. *Wir setzen $\mathscr{F}_\infty := \mathscr{F}$ und $\mathscr{F}_{\infty-} := \sigma(\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathscr{F}_t)$.*

Definition 1.1.7. *Eine Teilmenge $A \subset \Omega$ heißt eine $\mathbb{P}$-Nullmenge, falls ein $N \in \mathscr{F}$ mit $A \subset N$ und $\mathbb{P}(N) = 0$ existiert.*

Definition 1.1.8. *Wir bezeichnen mit $\mathscr{N}^{\mathbb{P}}$ das System aller $\mathbb{P}$-Nullmengen von $\mathscr{F}$.*

Definition 1.1.9. *Die stochastische Basis $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ heißt vollständig, falls $\mathscr{N}^{\mathbb{P}} \subset \mathscr{F}$ (das heißt $\mathscr{F}$ ist $\mathbb{P}$-vollständig) und $\mathscr{N}^{\mathbb{P}} \subset \mathscr{F}_t$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.*

Bemerkung 1.1.10. *Die stochastische Basis $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ist genau dann vollständig, wenn $\mathscr{N}^{\mathbb{P}} \subset \mathscr{F}_0$.*

Definition 1.1.11. *Wir setzen $\mathscr{F}^{\mathbb{P}} := \sigma(\mathscr{F} \cup \mathscr{N}^{\mathbb{P}})$, das heißt $\mathscr{F}^{\mathbb{P}}$ ist die $\mathbb{P}$-Vervollständigung von $\mathscr{F}$, und wir definieren $\mathbb{F}^{\mathbb{P}} = (\mathscr{F}_t^{\mathbb{P}})_{t\in\mathbb{R}_+}$ durch $\mathscr{F}_t^{\mathbb{P}} := \sigma(\mathscr{F}_t \cup \mathscr{N}^{\mathbb{P}})$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.*

Lemma 1.1.12. *$(\Omega, \mathscr{F}^{\mathbb{P}}, \mathbb{F}^{\mathbb{P}}, \mathbb{P})$ ist eine vollständige stochastische Basis.*

Beweis. Übung. □

Definition 1.1.13. *Eine Teilmenge $A \subset \Omega \times \mathbb{R}_+$ heißt eine zufällige Menge.*

Es sei E ein metrischer Raum (bei uns üblicherweise $E = \mathbb{R}$ oder $E = \mathbb{R}^d$), versehen mit der Borel'schen σ-Algebra $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$.

Definition 1.1.14. *Eine Prozess (oder, ein E-wertiger Prozess) ist eine Familie $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ von Zufallsvariablen $X_t : \Omega \to E$.*

Definition 1.1.15. *Ein Prozess X heißt messbar, falls er als Abbildung*

$$X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to E, \quad (\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$$

$\mathscr{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-$\mathcal{E}$-messbar ist.

Lemma 1.1.16.

(a) Die Menge aller Prozesse ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(b) Die Menge aller messbaren Prozesse ist ein Unterraum.

Beweis. Übung. □

Definition 1.1.17.

(a) Ein Prozess X heißt càdlàg, falls alle Pfade rechtsstetig sind und linksseitige Grenzwerte besitzen.

(b) Für einen càdlàg-Prozess X definieren wir die Prozesse X_- und ΔX durch

$$X_{t-} := \begin{cases} X_0, & \text{falls } t = 0, \\ \lim_{s \uparrow t} X_s, & \text{falls } t > 0, \end{cases}$$

und $\Delta X := X - X_-$.

Bemerkung 1.1.18. *Es gilt stets $\Delta X_0 = 0$.*

Definition 1.1.19.

(a) Eine zufällige Menge A heißt vernachlässigbar, falls

$$\{\omega \in \Omega : (\omega, t) \in A \text{ für ein } t \in \mathbb{R}_+\}$$

eine $\mathbb{P}$-Nullmenge ist.

(b) Zwei Prozesse X und Y heißen ununterscheidbar, falls die zufällige Menge

$$\{X \neq Y\} := \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$$

vernachlässigbar ist.

Definition 1.1.20. *Es seien X und Y zwei Prozesse. Dann heißt X eine Version (oder Modifikation) von Y, falls $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.*

Lemma 1.1.21. *Es seien X und Y zwei ununterscheidbare Prozesse. Dann ist X eine Version von Y.*

Beweis. Übung. □

Lemma 1.1.22. *Es seien X und Y zwei rechtsstetige (oder linksstetige) Prozesse, so dass X eine Version von Y ist. Dann sind X und Y ununterscheidbar.*

Beweis. Übung. □

Definition 1.1.23. *Ein Prozess X heißt $\mathbb{F}$-adaptiert (oder kurz adaptiert), falls für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ die Zufallsvariable X_t bezüglich $\mathscr{F}_t$ messbar ist.*

Lemma 1.1.24. *Ein Prozess X sei $\mathbb{F}$-adaptiert. Dann ist er auch $\mathbb{F}_+$-adaptiert.*

Beweis. Übung. □

Lemma 1.1.25. *Die Menge aller adaptierten càdlàg-Prozesse ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

Beweis. Übung. □

Lemma 1.1.26. *Ist X ein adaptierter càdlàg-Prozess, dann sind X_- und ΔX ebenfalls adaptiert.*

Beweis. Übung. □

Lemma 1.1.27. *Es sei X ein Prozess.*

(a) Die Familie $\mathbb{F}^X = (\mathscr{F}_t^X)_{t\in\mathbb{R}_+}$ definiert durch

$$\mathscr{F}_t^X := \sigma(X_s : s \in [0,t])$$

ist eine Filtration.

(b) X ist $\mathbb{F}^X$-adaptiert.

(c) Ist X adaptiert bezüglich $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, dann gilt $\mathscr{F}_t^X \subset \mathscr{F}_t$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Übung. □

Definition 1.1.28. *Wir nennen $\mathbb{F}^X$ die von X erzeugte Filtration.*

Korollar 1.1.29. *Es sei X ein Prozess. Dann ist $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}_+^X, \mathbb{P})$ eine stochastische Basis.*

1.2 Rechts- und linksstetige Funktionen

Lemma 1.2.1. *Es sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*

(a) f ist genau dann rechtsstetig, wenn zu jedem $t \in \mathbb{R}_+$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|f(t) - f(s)| \le \epsilon \quad \text{für alle } s \in [t,\infty) \text{ mit } |s-t| \le \delta.$$

(b) f ist genau dann linksstetig, wenn zu jedem $t \in \mathbb{R}_+$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|f(t) - f(s)| \le \epsilon \quad \text{für alle } s \in [0,t] \text{ mit } |s-t| \le \delta.$$

Beweis. Übung. □

Lemma 1.2.2. *Es sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine rechtsstetige Funktion. Wir definieren die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von rechtsstetigen Funktionen $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ durch*

$$f_n := \sum_{k\in\mathbb{N}} f\left(\frac{k}{2^n}\right) \mathbb{1}_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})},$$

und die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von linksstetigen Funktionen $g_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ durch

$$g_n := f(0)\mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k\in\mathbb{N}} f\left(\frac{k}{2^n}\right) \mathbb{1}_{(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]}.$$

Dann gilt $f_n \to f$ und $g_n \to f$ punktweise.

Beweis. Übung. □

Lemma 1.2.3. *Es sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine linksstetige Funktion. Wir definieren die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von rechtsstetigen Funktionen $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ durch*

$$f_n := \sum_{k\in\mathbb{N}} f\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \mathbb{1}_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})},$$

und die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von linksstetigen Funktionen $g_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ durch

$$g_n := f(0)\mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k\in\mathbb{N}} f\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \mathbb{1}_{(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]}.$$

Dann gilt $f_n \to f$ und $g_n \to g$ punktweise.

Beweis. Übung. □

Satz 1.2.4. *Es sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine càdlàg-Funktion. Zu jedem $T \in \mathbb{R}_+$ und jedem $\epsilon > 0$ existieren $N \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$, so dass*

$$\sup_{s,t\in[t_{n-1},t_n)} |f(t) - f(s)| \leq \epsilon \quad \text{für alle } n = 1, \ldots, N.$$

Beweis. Siehe [Bil68, Lemma 14.1]. □

Satz 1.2.5. *Es sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine càdlàg-Funktion. Dann gilt*

$$\sup_{t\in[0,T]} |f(t)| < \infty \quad \text{für alle } T \in \mathbb{R}_+.$$

Beweis. Übung. □

Satz 1.2.6. *Es sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine càdlàg-Funktion.*

(a) Für jedes $\epsilon > 0$ und $T \in \mathbb{R}_+$ ist $\{|\Delta f| > \epsilon\} \cap [0,T]$ endlich.

(b) Die Menge $\{\Delta f \neq 0\}$ ist höchstens abzählbar.

Beweis. Übung. □

Satz 1.2.7. *Es sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine càdlàg-Funktion. Wir definieren $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch*

$$T_n := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : |f(t)| > n\}.$$

Dann gilt $T_n \uparrow \infty$.

Beweis. Übung. □

Satz 1.2.8. *Es sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine càdlàg-Funktion. Dann ist $f^* : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definiert durch $f^*(t) := \sup_{s\leq t} |f(s)|$ eine wohldefinierte, monoton wachsende càdlàg-Funktion.*

Beweis. Nach Satz 1.2.5 ist f^* wohldefiniert. Außerdem ist f^* per Definition monoton wachsend. Es sei $t \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Wegen der Monotonie von f^* existieren die Grenzwerte $f^*(t+)$ und $f^*(t-)$. Wir werden zeigen, dass $f^*(t) = f^*(t+)$. Angenommen, es gilt $f^*(t) < f^*(t+)$. Definiere $\epsilon > 0$ durch $\epsilon := f^*(t+) - f^*(t)$. Setze $s_0 := 1$ und definiere $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv wie folgt: Es gilt

$$\sup_{u\in[0,s]} |f(u)| \geq f^*(t+) = f^*(t) + \epsilon = \sup_{u\in[0,t]} |f(u)| + \epsilon, \quad s \in (t, t + \min\{s_{n-1}, 1/n\}].$$

Also existiert ein $s_n \in (0, \frac{1}{n}]$ mit $s_n \leq s_{n-1}$, so dass

$$|f(t + s_n)| + \frac{1}{n} \geq \sup_{u\in[0,t]} |f(u)| + \epsilon \geq |f(t)| + \epsilon.$$

Dies liefert eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $s_n \downarrow 0$ und

$$\lim_{n\to\infty} |f(t + s_n)| \geq |f(t)| + \epsilon > |f(t)|,$$

was der Rechtsstetigkeit von f widerspricht. □

1.3 Stoppzeiten

Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ eine stochastische Basis.

Definition 1.3.1. *Eine Abbildung $T : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty]$ heißt eine $\mathbb{F}$-Stoppzeit (oder kurz, eine Stoppzeit), falls*

$$\{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Satz 1.3.2. *Es sei $T : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ eine Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) Ist T ein Stoppzeit, dann gilt

$$\{T \leq t\}, \{T = t\} \in \mathscr{F}_t \quad \textit{und} \quad \{T < t\} \in \mathscr{F}_{t-} \quad \textit{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

(b) T ist genau dann eine Stoppzeit, wenn

$$\{T < t\} \in \mathscr{F}_t \quad \textit{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Beweis.

(a) Es genügt, zu zeigen, dass $\{T < t\} \in \mathscr{F}_{t-}$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt. Hierfür genügt es, die Situation $t \in (0, \infty)$ anzuschauen. Es existiert ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} \leq t$, so dass folgt

$$\{T < t\} = \bigcup_{n \geq n_0} \underbrace{\left\{T \leq t - \frac{1}{n}\right\}}_{\in \mathscr{F}_{t-\frac{1}{n}} \subset \mathscr{F}_{t-}} \in \mathscr{F}_{t-}.$$

(b) Es gelte $\{T < t\} \in \mathscr{F}_t$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Wegen der Rechtsstetigkeit der Filtration $\mathbb{F}$ folgt für alle $t \in \mathbb{R}_+$

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{s > t} \{T < s\} \in \bigcap_{s > t} \mathscr{F}_s = \mathscr{F}_{t+} = \mathscr{F}_t.$$

Also ist T eine Stoppzeit, was wegen Teil (a) den Beweis beendet.

□

Lemma 1.3.3. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Für jedes $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ ist $T = t$ eine Stoppzeit.

(b) Für eine Stoppzeit T und ein $t \in \mathbb{R}_+$ ist $T + t$ ebenfalls eine Stoppzeit.

(c) Für eine Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Stoppzeiten sind $\inf_{n \in \mathbb{N}} T_n$ und $\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ ebenfalls Stoppzeiten.

(d) Für eine Konstante $\alpha \in [1, \infty)$ und eine Stoppzeit T ist αT ebenfalls eine Stoppzeit.

Beweis.

(a) Für jedes $s \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\{T \leq s\} = \{t \leq s\} \in \{\Omega, \emptyset\} \subset \mathscr{F}_s.$$

(b) Für jedes $s \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\{T + t \leq s\} = \{T \leq s - t\}.$$

Falls $s \geq t$, so folgt

$$\{T + t \leq s\} \in \mathscr{F}_{s-t} \subset \mathscr{F}_s,$$

und falls $s < t$, so folgt

$$\{T + t \leq s\} = \emptyset \in \mathscr{F}_s.$$

(c) Für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\left\{ \inf_{n \in \mathbb{N}} T_n < t \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{T_n < t\} \in \mathscr{F}_t.$$

In der Tat, es sei $\omega \in \Omega$ beliebig. Falls ein $n \in \mathbb{N}$ mit $T_n(\omega) < t$ existiert, dann gilt auch $\inf_{n \in \mathbb{N}} T_n(\omega) < t$. Gilt umgekehrt $\inf_{n \in \mathbb{N}} T_n(\omega) < t$, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $T_n(\omega) < t$.

Für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ gilt außerdem

$$\left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} T_n \leq t \right\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{T_n \leq t\} \in \mathscr{F}_t.$$

In der Tat, es sei $\omega \in \Omega$ beliebig. Falls $T_n(\omega) \leq t$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt auch $\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n(\omega) \leq t$. Gilt umgekehrt $\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n(\omega) \leq t$, dann ist $T_n(\omega) \leq t$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\{\alpha T \leq t\} = \left\{ T \leq \frac{t}{\alpha} \right\} \in \mathscr{F}_{\frac{t}{\alpha}} \subset \mathscr{F}_t.$$

$\square$

Definition 1.3.4. *Für eine Stoppzeit T bezeichnen wir mit*

$$\mathscr{F}_T := \{A \in \mathscr{F} : A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t \text{ für alle } t \in \mathbb{R}_+\}$$

das Mengensystem aller bis T beobachtbaren Ereignisse.

Lemma 1.3.5. *Es sei T eine Stoppzeit. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $\mathscr{F}_T$ ist eine σ-Algebra.

(b) Es gilt $\mathscr{F}_T = \{A \in \mathscr{F} : A \cap \{T < t\} \in \mathscr{F}_t$ für alle $t \in \mathbb{R}_+\}$.

Beweis. Übung. $\square$

Definition 1.3.6. *Für eine Stoppzeit T bezeichnen wir mit*

$$\mathscr{F}_{T-} := \sigma(\mathscr{F}_0 \cup \{A \cap \{t < T\} : t \in \mathbb{R}_+ \text{ und } A \in \mathscr{F}_t\})$$

die σ-Algebra aller (strikt) vor T beobachtbaren Ereignisse.

Lemma 1.3.7. *Es sei $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ beliebig.*

(a) Für die Stoppzeit $T = t$ gilt, dass $\mathscr{F}_T = \mathscr{F}_t$.

(b) Für die Stoppzeit $T = t$ gilt, dass $\mathscr{F}_{T-} = \mathscr{F}_{t-}$.

(Für $t = \infty$ vgl. jeweis mit Definition 1.1.6).

Beweis. Übung. $\square$

Lemma 1.3.8. *Es sei T eine Stoppzeit.*

(a) Es gilt $\mathscr{F}_{T-} \subset \mathscr{F}_T$.

(b) T ist $\mathscr{F}_{T-}$-messbar.

Beweis.

(a) Es gilt $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_T$, und für $t \in \mathbb{R}_+$, $A \in \mathscr{F}_t$ und $s \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$(A \cap \{t < T\}) \cap \{T \leq s\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathscr{F}_s, & \text{falls } s \leq t, \\ (\underbrace{A \cap \{T \leq s\}}_{\in \mathscr{F}_s}) \cap \underbrace{\{T > t\}}_{\in \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}_s} \in \mathscr{F}_s, & \text{falls } s > t. \end{cases}$$

(b) Es gilt $\{T > t\} \in \mathscr{F}_{T-}$ für jedes $t \in \mathbb{R}_+$.

$\square$

Lemma 1.3.9. *Es seien $S \leq T$ zwei Stoppzeiten.*

(a) Es gilt $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$.

(b) Es gilt $\mathscr{F}_{S-} \subset \mathscr{F}_{T-}$.

Beweis. Übung. □

Lemma 1.3.10. *Es seien S, T zwei Stoppzeiten. Für jedes $A \in \mathscr{F}_S$ gilt*

$$A \cap \{S \leq T\}, A \cap \{S = T\} \in \mathscr{F}_T \quad \textit{und} \quad A \cap \{S < T\} \in \mathscr{F}_{T-}.$$

Beweis.

(i) Es sei $t \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Nach Lemma 1.3.8 ist $S \wedge t$ bezüglich $\mathscr{F}_{S \wedge t}$ messbar, und $T \wedge t$ ist bezüglich $\mathscr{F}_{T \wedge t}$ messbar. Außerdem gilt nach Lemma 1.3.9, dass $\mathscr{F}_{S \wedge t} \subset \mathscr{F}_t$ und $\mathscr{F}_{T \wedge t} \subset \mathscr{F}_t$. Also sind $S \wedge t$ und $T \wedge t$ bezüglich $\mathscr{F}_t$ messbar, und es folgt $\{S \wedge t \leq T \wedge t\} \in \mathscr{F}_t$. Also gilt

$$(A \cap \{S \leq T\}) \cap \{T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cap \{T \leq t\} \cap \{S \wedge t \leq T \wedge t\} \in \mathscr{F}_t,$$

und somit $A \cap \{S \leq T\} \in \mathscr{F}_T$.

(ii) Es gilt

$$A \cap \{S < T\} = A \cap \left(\bigcup_{t \in \mathbb{Q}_+} \{S \leq t < T\} \right) = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}_+} \big(\underbrace{A \cap \{S \leq t\}}_{\in \mathscr{F}_t} \cap \{t < T\} \big) \in \mathscr{F}_{T-}.$$

(iii) Nach Lemma 1.3.8 gilt

$$\begin{aligned} A \cap \{S = T\} &= A \cap \big(\{S \leq T\} \setminus \{S < T\} \big) \\ &= \big(\underbrace{A \cap \{S \leq T\}}_{\in \mathscr{F}_T} \big) \setminus \big(\underbrace{A \cap \{S < T\}}_{\in \mathscr{F}_{T-} \subset \mathscr{F}_T} \big) \in \mathscr{F}_T. \end{aligned}$$

□

Lemma 1.3.11. *Ist $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Stoppzeiten, dann gilt für die Stoppzeit $T = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} T_n$, dass $\mathscr{F}_T = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_{T_n}$.*

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $T \leq T_n$, und daher nach Lemma 1.3.9 $\mathscr{F}_T \subset \mathscr{F}_{T_n}$, so dass folgt

$$\mathscr{F}_T \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_{T_n}.$$

Nun sei $A \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_{T_n}$ beliebig. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}_+$ mit Lemma 1.3.5(b)

$$A \cap \{T < t\} = A \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{T_n < t\} \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap \{T_n < t\}) \in \mathscr{F}_t,$$

und somit $A \in \mathscr{F}_T$. □

Lemma 1.3.12. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Es seien $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Stoppzeiten und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ eine Zerlegung von Ω mit $A_n \in \mathscr{F}_{T_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$T := \sum_{n\in\mathbb{N}} T_n \mathbb{1}_{A_n}$$

ebenfalls eine Stoppzeit.

(b) Es seien $S \leq T$ Stoppzeiten und $A \in \mathscr{F}_S$. Dann ist

$$R := S\mathbb{1}_A + T\mathbb{1}_{A^c}$$

ebenfalls eine Stoppzeit.

(c) Es seien T eine Stoppzeit und $A \in \mathscr{F}_T$. Dann ist

$$T_A := T\mathbb{1}_A + \infty\mathbb{1}_{A^c}$$

ebenfalls eine Stoppzeit.

Beweis.

(a) Für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\{T \leq t\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big[A_n \cap \{T_n \leq t\}\big] \in \mathscr{F}_t.$$

(b) Folgt aus Teil (a), da $A^c \in \mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$ nach Lemma 1.3.9(a).

(c) Folgt aus Teil (b), da ∞ eine Stoppzeit ist.

□

Lemma 1.3.13. *Es sei T eine Stoppzeit. Dann ist die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch*

$$T_n := \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq T < \frac{k}{2^n}\}} + \infty\mathbb{1}_{\{T=\infty\}}$$

eine Folge von Stoppzeiten, so dass $T_n(\Omega)$ höchstens abzählbar für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist, und $T_n \downarrow T$ für $n \to \infty$ gilt.

Beweis. Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\left\{\frac{k-1}{2^n} \leq T < \frac{k}{2^n}\right\} = \underbrace{\left\{T \geq \frac{k-1}{2^n}\right\}}_{\in \mathscr{F}_{(k-1)/2^n} \subset \mathscr{F}_{k/2^n}} \cap \underbrace{\left\{T < \frac{k}{2^n}\right\}}_{\in \mathscr{F}_{k/2^n}} \in \mathscr{F}_{k/2^n}, \quad k \in \mathbb{N}$$

und $\{T = \infty\} \in \mathscr{F}_\infty$. Also ist die Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach Lemma 1.3.12(a) eine Folge von Stoppzeiten. Per Konstruktion gilt außerdem, dass $T_n(\Omega)$ höchstens abzählbar für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist, und $T_n \downarrow T$ für $n \to \infty$ gilt. □

Satz 1.3.14. *Es seien X ein $\mathbb{R}$-wertiger, adaptierter, rechtsstetiger Prozess mit monoton wachsenden Pfaden und $a \in \overline{\mathbb{R}}$ eine Konstante. Dann ist*

$$T := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : X_t \geq a\}$$

eine Stoppzeit.

Beweis. Übung. □

Nun sei (E, ρ) ein metrischer Raum.

Satz 1.3.15. *Es seien X ein E-wertiger, adaptierter, rechtsstetiger Prozess und $O \subset E$ eine offene Menge. Dann ist*

$$T^O := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : X_t \in O\}$$

eine Stoppzeit.

Beweis. Wir werden zeigen, dass für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\{T^O < t\} = \bigcup_{s \in [0,t) \cap \mathbb{Q}_+} \{X_s \in O\}.$$

Da X adaptiert ist, folgt dann $\{T^O < t\} \in \mathscr{F}_t$, und somit ist T^O nach Satz 1.3.2 eine Stoppzeit. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $t \in (0, \infty)$.

(i) Es sei $\omega \in \Omega$ mit $X_s(\omega) \in O$ für ein $s \in [0,t) \cap \mathbb{Q}_+$. Dann gilt $T^O(\omega) < t$ aufgrund der Definition von T^O.

(ii) Es sei $\omega \in \Omega$ mit $T^O(\omega) < t$ beliebig. Dann existiert ein $u \in [0,t)$ mit $X_u(\omega) \in O$. Da die Menge O offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$, so dass

$$x \in O \quad \text{für alle } x \in E \text{ mit } \rho(x, X_u(\omega)) \leq \epsilon.$$

Wegen der Rechtsstetigkeit von $s \mapsto X_s(\omega)$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\rho(X_s(\omega), X_u(\omega)) \leq \epsilon \quad \text{für alle } s \in [u, \infty) \text{ mit } |s - u| \leq \delta.$$

Wegen $u < t$ existiert ein $s \in \mathbb{Q}_+$ mit $u \leq s < t$ und $|s - u| \leq \delta$, und es folgt $X_s(\omega) \in O$.

□

Satz 1.3.16. *Es seien X ein E-wertiger, adaptierter, stetiger Prozess und $A \subset E$ eine abgeschlossene Menge. Dann ist*

$$T^A := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : X_t \in A\}$$

eine Stoppzeit.

Beweis. Eventuell Übung. □

1.4 Die optionale Sigma-Algebra

Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ eine stochastische Basis.

Definition 1.4.1.

(a) *Wie definieren die optionale σ-Algebra $\mathscr{O}$ über $\Omega \times \mathbb{R}_+$ durch*

$$\mathscr{O} := \sigma(X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \,|\, X \text{ ist adaptiert und càdlàg}).$$

(b) *Ein $\mathscr{O}$-messbarer Prozess X heißt ein optionaler Prozess.*

(c) *Eine zufällige Menge $A \in \mathscr{O}$ heißt eine optionale Menge.*

Lemma 1.4.2. *Die Menge der optionalen Prozesse ist ein Vektorraum.*

Beweis. Übung. □

Definition 1.4.3. *Für einen Prozess X und eine Stoppzeit T definieren wir den gestoppten Prozess X^T durch*

$$X_t^T := X_{T \wedge t}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Satz 1.4.4 (über monotone Klassen)**.** *Es seien D eine Menge und $\mathscr{M} \subset \mathscr{H}$ Mengensysteme von beschränkten Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, so dass gilt:*

(i) *$\mathscr{H}$ ist ein Vektorrraum mit $\mathbb{1}_D \in \mathscr{H}$.*

(ii) *Für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{H}$ mit $f_n \uparrow f$ für eine beschränkte Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gilt $f \in \mathscr{H}$.*

(iii) *Für $f, g \in \mathscr{M}$ gilt $fg \in \mathscr{M}$.*

Dann gilt für jede beschränkte $\sigma(\mathscr{M})$-messbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, dass $f \in \mathscr{H}$.

Beweis. Siehe [Sha88, Seite 365] oder [Ste01, Section 12.6]. □

Satz 1.4.5. *Es sei X ein optionaler Prozess. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) X ist messbar.

(b) Für jede Stoppzeit T ist $X_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}$ eine $\mathscr{F}_T$-messbare Zufallsvariable. (Folglich ist X adaptiert.)

(c) Für jede Stoppzeit T ist X^T ebenfalls ein optionaler Prozess.

Beweis. Nach dem Satz über monotone Klassen (Satz 1.4.4) genügt es, die Eigenschaften (a), (b) und (c) für jeden adaptierten càdlàg-Prozess X zu beweisen.

(a) Wir definieren die Prozesse $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$X^n := \sum_{k\in\mathbb{N}} X_{\frac{k}{2^n}} \mathbb{1}_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Da X adaptiert ist, gilt für $n \in \mathbb{N}$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\{X^n \in B\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left[\underbrace{\{X_{k/2^n} \in B\}}_{\in \mathscr{F}_{k/2^n} \subset \mathscr{F}} \times \underbrace{\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)} \right] \in \mathscr{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+).$$

Da X rechtsstetig ist, gilt nach Lemma 1.2.2, dass $X^n \to X$ auf $\Omega \times \mathbb{R}_+$, und folglich ist X ein $\mathscr{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-messbarer Prozess.

(b) Es sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge von Stoppzeiten aus Lemma 1.3.13. Da X adaptiert ist, gilt für $n \in \mathbb{N}$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $t \in \mathbb{R}_+$

$$\{X_{T_n} \in B\} \cap \{T_n \le t\} = \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k/2^n \le t}} \big[\underbrace{\{X_{k/2^n} \in B\} \cap \{T_n = k/2^n\}}_{\in \mathscr{F}_{k/2^n} \subset \mathscr{F}_t} \big] \in \mathscr{F}_t.$$

Also ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable $X_{T_n} \mathbb{1}_{\{T_n<\infty\}}$ bezüglich $\mathscr{F}_{T_n}$ messbar. Da X rechtsstetig ist und $T_n \downarrow T$, gilt $X_{T_n} \mathbb{1}_{\{T_n<\infty\}} \to X_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}$ auf $\Omega \times \mathbb{R}_+$. Mit Lemma 1.3.11(b) folgt, dass $X_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}$ bezüglich $\mathscr{F}_T = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_{T_n}$ messbar ist.

(c) Es gilt

$$X_t^T = X_{t\wedge T}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

und somit ist X^T ebenfalls càdlàg. Außerdem ist X_t^T nach Teil (b) für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ bezülich $\mathscr{F}_{t\wedge T}$, und damit auch bezüglich $\mathscr{F}_t$ messbar. Folglich ist X^T ebenfalls adaptiert, und damit insbesondere optional.

□

Definition 1.4.6. *Für zwei Stoppzeiten S, T definieren wir die* *stochastischen Intervalle*

$$
\begin{aligned}
[\![S,T]\!] &:= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : S(\omega) \le t \le T(\omega)\},\\
[\![S,T[\![&:= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : S(\omega) \le t < T(\omega)\},\\
]\!]S,T]\!] &:= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : S(\omega) < t \le T(\omega)\},\\
]\!]S,T[\![&:= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : S(\omega) < t < T(\omega)\}.
\end{aligned}
$$

Außerdem setzen wir $[\![T]\!] := [\![T,T]\!]$.

Lemma 1.4.7. *Es seien S, T zwei Stoppzeiten.*

(a) Für jede $\mathscr{F}_S$-messbare Zufallsvariable Y sind die Prozesse $Y\mathbb{1}_{[\![S,T]\!]}$, $Y\mathbb{1}_{[\![S,T[\![}$, $Y\mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]}$, $Y\mathbb{1}_{]\!]S,T[\![}$ optional.

(b) Die stochastischen Intervalle $[\![S,T]\!], [\![S,T[\![,]\!]S,T]\!],]\!]S,T[\![$ sind optionale Mengen.

Beweis.

(a) Wir zeigen, dass $X = Y\mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]}$ optional ist. Hierzu dürfen wir annehmen, dass $Y = \mathbb{1}_A$ für ein $A \in \mathscr{F}_S$. (Warum?) Wir definieren die Stoppzeiten $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$S_n := S + \frac{1}{n}, \quad T_n := T + \frac{1}{n},$$

und die càdlàg-Prozesse $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$X^n := \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{[\![S_n,T_n[\![}.$$

Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}_+$

$$X_t^n = \mathbb{1}_{A\cap\{S_n \le t\}} \mathbb{1}_{\{T_n > t\}} \in \mathscr{F}_t,$$

da $A \in \mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_{S_n}$. Folglich ist X^n für jedes $n \in \mathbb{N}$ adaptiert, und somit optional. Da $X^n \to X$ auf $\Omega \times \mathbb{R}_+$, ist X ebenfalls optional.

(b) Folgt aus Teil (a).

□

Satz 1.4.8. *Jeder adaptierte, linksstetige Prozess X ist optional.*

Beweis. Wir definieren die Prozesse $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$X^n := \sum_{k\in\mathbb{N}} X_{\frac{k-1}{2^n}} \mathbb{1}_{[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n})}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nach Lemma 1.4.7 ist X^n für jedes $n \in \mathbb{N}$ optional. Da X linksstetig ist, gilt nach Lemma 1.2.3, dass $X^n \to X$ auf $\Omega \times \mathbb{R}_+$, und folglich ist X ein optionaler Prozess. □

Korollar 1.4.9. *Es sei X ein adaptierter càdlàg-Prozess. Dann sind die beiden Prozesse X_- und ΔX optional.*

Beweis. Der Prozess X_- ist linksstetig, und nach Lemma 1.1.26 adaptiert. Also folgt mit Satz 1.4.8, dass X_- optional ist. Da X nach Definition 1.4.1 optional ist, folgt ebenfalls, dass $\Delta X = X - X_-$ optional ist. □

Definition 1.4.10.

(a) *Eine zufällige Menge A heißt dünn, falls eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten existiert, so dass $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![T_n]\!]$.*

(b) *Falls $[\![T_n]\!] \cap [\![T_m]\!] = \emptyset$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$, dann heißt $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ausschöpfende Folge für A.*

Bemerkung 1.4.11. *Es sei A eine dünne Menge.*

(a) *A ist optional.*

(b) *Für jedes $\omega \in \Omega$ ist der Schnitt $\{t \in \mathbb{R}_+ : (\omega, t) \in A\}$ höchstens abzählbar.*

Lemma 1.4.12. *Jede dünne Menge A besitzt eine ausschöpfende Folge von Stoppzeiten.*

Beweis. Es existiert eine Folge von Stoppzeiten $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![T_n]\!]$. Wir definieren $C_n \subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$ duch

$$C_n := \bigcap_{m=1}^{n-1} \{T_m \neq T_n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nach Lemma 1.3.10 gilt

$$C_n \in \mathscr{F}_{T_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Also ist nach Lemma 1.3.12 die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$S_n = (T_n)_{C_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

eine Folge von Stoppzeiten, und nach Konstruktion ist sie ausschöpfend für A. □

Satz 1.4.13. *Es sei X ein adaptierter càdlàg-Prozess. Dann ist $\{\Delta X \neq 0\}$ eine dünne Menge.*

Beweis. Siehe [JS03, Prop. I.1.32]. □

Korollar 1.4.14. *Es sei X ein adaptierter càdlàg-Prozess. Dann existiert eine ausschöpfende Folge von Stoppzeiten $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass*

$$\{\Delta X \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![T_n]\!].$$

1.5 Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen

Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ eine stochastische Basis.

Definition 1.5.1. *Es sei X ein adaptierter càdlàg-Prozess.*

(a) X heißt ein Prozess mit unabhängigen Zuwächsen (PUZ) (bezüglich $\mathbb{F}$), falls $X_0 = 0$ und für alle $0 \leq s \leq t$ die Zufallsvariable $X_t - X_s$ und die σ-Algebra $\mathscr{F}_s$ unabhängig sind.

(b) X heißt ein Prozess mit unabhängigen und stationären Zuwächsen (PUSZ) (bezüglich $\mathbb{F}$), falls X ein PUZ ist, und für alle $0 \leq s \leq t$ gilt $X_t - X_s \stackrel{\mathrm{d}}{=} X_{t-s}$.

(c) Ein $t \in \mathbb{R}_+$ heißt eine feste Sprungzeit von X, falls $\mathbb{P}(\Delta X_t \neq 0) > 0$.

(d) Wir bezeichnen mit $J \subset \mathbb{R}_+$ die Menge aller festen Sprungzeiten von X.

Bemerkung 1.5.2. *Ein PUSZ wird auch oft ein Lévy-Prozess genannt.*

Definition 1.5.3. *Ein stetiger, adaptierter Prozess W mit $W_0 = 0$ heißt ein $\mathbb{F}$-Wiener-Prozess (oder kurz, ein Wiener-Prozess), falls gilt:*

(i) $\mathbb{E}[W_t^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[W_t] = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

(ii) $W_t - W_s$ und $\mathscr{F}_s$ sind für alle $0 \leq s < t$ unabhängig.

Definition 1.5.4. *Es sei W ein Wiener-Prozess.*

(a) Wir nennen $\sigma^2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\sigma_t^2 = \mathbb{E}[W_t^2]$ die Varianzfunktion von W.

(b) Gilt $\sigma_t^2 = t$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$, so nennen wir W einen Standard-Wiener-Prozess.

Beispiel 1.5.5. *Ein Wiener-Prozess W ist ein PUZ.*

Definition 1.5.6. *Ein adaptierter càdlàg-Prozess N heißt ein Punktprozess, falls $N \in \mathbb{N}_0$ und $\Delta N \in \{0, 1\}$.*

Definition 1.5.7. *Ein Punktprozess N heißt ein verallgemeinerter $\mathbb{F}$-Poisson-Prozess (oder kurz, ein verallgemeinerter Poisson-Prozess), falls gilt:*

(i) $\mathbb{E}[N_t] < \infty$ *für alle* $t \in \mathbb{R}_+$.

(ii) $N_t - N_s$ *und* $\mathscr{F}_s$ *sind für alle* $0 \leq s < t$ *unabhängig.*

Definition 1.5.8. *Es sei N ein verallgemeinerter Poisson-Prozess.*

(a) Wir nennen $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $a_t = \mathbb{E}[N_t]$ *die Intensität von* N.

(b) Ist a stetig, so nennen wir N einen Poisson-Prozess.

(c) Gilt $a_t = t$ *für alle* $t \in \mathbb{R}_+$, *so nennen wir N einen Standard-Poisson-Prozess.*

Beispiel 1.5.9. *Ein verallgemeinerter Poisson-Prozess N ist ein PUZ.*

Lemma 1.5.10. *Es sei X ein adaptierter càdlàg-Prozess. Dann ist J höchstens abzählbar.*

Beweis. Übung. □

Lemma 1.5.11. *Es sei X ein PUSZ. Dann gilt $J = \emptyset$.*

Beweis. Übung. □

1.6 Lokalisierung

Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ eine stochastische Basis.

Definition 1.6.1. *Eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten heißt eine lokalisierende Folge, falls $T_n \uparrow \infty$.*

Definition 1.6.2. *Es sei $\mathscr{C}$ eine Klasse von Prozessen. Ein Prozess X gehört zur lokalisierten Klasse $\mathscr{C}_{\mathrm{loc}}$, falls eine lokalisierende Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X^{T_n} \in \mathscr{C}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert. In diesem Fall nennen wir $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge für X.*

Bemerkung 1.6.3. *Es gilt $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}_{\mathrm{loc}}$. (Für $X \in \mathscr{C}$ wählen wir $T_n = \infty$, $n \in \mathbb{N}$ als lokalisierende Folge.)*

Bemerkung 1.6.4. *Für zwei Klassen $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}'$ gilt $\mathscr{C}_{\mathrm{loc}} \subset \mathscr{C}'_{\mathrm{loc}}$.*

Definition 1.6.5. *Eine Klasse $\mathscr{C}$ von Prozessen heißt stabil unter Stoppen, falls*

$$X^T \in \mathscr{C} \quad \text{für alle } X \in \mathscr{C} \text{ und jede Stoppzeit } T.$$

Lemma 1.6.6. *Es sei $\mathscr{C}$ eine Klasse von Prozessen, die stabil unter Stoppen ist. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $\mathscr{C}_{\mathrm{loc}}$ *ist ebenfalls stabil unter Stoppen.*

(b) $(\mathscr{C}_{\mathrm{loc}})_{\mathrm{loc}} = \mathscr{C}_{\mathrm{loc}}$.

Beweis. Übung. □

Lemma 1.6.7. *Es seien $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ zwei Klassen von Prozessen, die stabil unter Stoppen sind. Dann gilt $(\mathscr{C} \cap \mathscr{C}')_{\mathrm{loc}} = \mathscr{C}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{C}'_{\mathrm{loc}}$.*

Beweis. Übung. □

Lemma 1.6.8. *Es sei X ein adaptierter càdlàg-Prozess. Dann ist $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch*

$$T_n := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : |X_t| > n\}$$

eine lokalisierende Folge von Stoppzeiten.

Beweis. Nach Satz 1.3.15 ist $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Stoppzeiten, und nach Satz 1.2.7 gilt $T_n \uparrow \infty$. □

Kapitel 2

Martingale und lokale Martingale

2.1 Die bedingte Erwartung

Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 2.1.1. *Es sei $p \in [1, \infty)$ beliebig.*

(a) Wir bezeichnen mit $\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ den Raum aller Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}$, so dass

$$\mathbb{E}\big[|X|^p\big]^{1/p} < \infty.$$

(b) Wir definieren $L^p = L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ durch $L^p := \mathscr{L}^p / \mathcal{N}$, wobei

$$\mathcal{N} = \{X : X \text{ ist eine Zufallsvariable mit } X = 0 \ \mathbb{P}\text{-fast überall}\}.$$

Satz 2.1.2. *Es seien $X \in \mathscr{L}^1(\mathscr{F})$ eine Zufallsvariable und $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ eine Sub-σ-Algebra. Dann existiert eine $\mathbb{P}$-fast sicher eindeutig bestimmte Zufallsvariable $Y \in \mathscr{L}^1(\mathscr{G})$, so dass*

$$\mathbb{E}[XZ] = \mathbb{E}[YZ] \quad \text{für jede beschränkte, } \mathscr{G}\text{-messbare Zufallsvariable } Z.$$

Wir setzen $\mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{G}] := Y$ und nennen diese $\mathbb{P}$-fast sicher eindeutig bestimmte Zufallsvariable die bedingte Erwartung von X unter $\mathscr{G}$.

Im Folgenden sei $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ eine Sub-σ-Algebra.

Satz 2.1.3. *Für $X, Y \in \mathscr{L}^1$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y \,|\, \mathscr{G}] = \alpha\, \mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{G}] + \beta\, \mathbb{E}[Y \,|\, \mathscr{G}] \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Bemerkung 2.1.4. *Also können wir $X \mapsto \mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{G}]$ als lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen $L^1(\mathscr{F})$ und $L^1(\mathscr{G})$ betrachten.*

Satz 2.1.5. *Es seien $X \in \mathscr{L}^1(\mathscr{F})$ und $Y \in \mathscr{L}^1(\mathscr{G})$ intergrierbare Zufallsvariablen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt $Y = \mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{G}]$ fast sicher.

(ii) Es gilt $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_A]$ für alle $A \in \mathscr{G}$.

Satz 2.1.6. *Es sei $X \in \mathscr{L}^1(\mathscr{F})$ eine Zufallsvariable. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) Gilt $X \geq 0$ fast sicher, dann ist auch $\mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{G}] \geq 0$ fast sicher.

(b) Gilt $|X| \leq C$ fast sicher für ein $C \geq 0$, dann ist auch $|\mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{G}]| \leq C$ fast sicher.

(c) Sind X und $\mathscr{G}$ unabhängig, dann gilt $\mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{G}] = \mathbb{E}[X]$ fast sicher.

(d) Es gilt $\mathbb{E}[X \,|\, \{\Omega, \emptyset\}] = \mathbb{E}[X]$ fast sicher.

(e) Es gilt $\mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{G}] = X$ fast sicher genau dann, wenn X eine $\mathscr{G}$-messbare Zufallsvariable ist.

(f) Ist $\mathscr{H} \subset \mathscr{G}$ eine weitere Sub-σ-Algebra, so gilt $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{G}] \,|\, \mathscr{H}] = \mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{H}]$ fast sicher.

(g) Es gilt $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{G}]] = \mathbb{E}[X]$.

(h) Es sei Y eine weitere $\mathscr{G}$-messbare Zufallsvariable, so dass $XY \in \mathscr{L}^1$. Dann gilt $\mathbb{E}[XY \,|\, \mathscr{G}] = Y\mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{G}]$ fast sicher.

(i) Es sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, so dass $\varphi(X) \in \mathscr{L}^1$. Dann gilt fast sicher

$$\varphi(\mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{G}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X) \,|\, \mathscr{G}]. \quad \textit{(Jensen-Ungleichung)}$$

(j) Es gilt $|\mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{G}]| \leq \mathbb{E}[|X| \,|\, \mathscr{G}]$ fast sicher.

Bemerkung 2.1.7. *Die bedingte Erwartung kann auch für beliebige nichtnegative $\mathscr{F}$-messbare Zufallsvariablen $X \geq 0$ definiert werden, und dann gilt $\mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{G}] \geq 0$ fast sicher.*

Satz 2.1.8 (Satz von der monotonen Konvergenz)**.** *Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von nichtnegativen $\mathscr{F}$-messbaren Zufallsvariablen $X_n \geq 0$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}\Big[\lim_{n\to\infty} X_n \,\Big|\, \mathscr{G}\Big] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n \,|\, \mathscr{G}] \quad \textit{fast sicher.}$$

Satz 2.1.9 (Lemma von Fatou)**.** *Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nichtnegativen $\mathscr{F}$-messbaren Zufallsvariablen $X_n \geq 0$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}\Big[\liminf_{n\to\infty} X_n \,\Big|\, \mathscr{G}\Big] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n \,|\, \mathscr{G}] \quad \textit{fast sicher.}$$

Satz 2.1.10 (Konvergenzsatz von Lebesgue)**.** *Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathscr{F}$-messbaren Zufallsvariablen, so dass $X_n \to X$ fast sicher für eine $\mathscr{F}$-messbare Zufallsvariable X. Weiterhin existiere eine Zufallsvariable $Y \in \mathscr{L}^1(\mathscr{F})$, so dass $|X_n| \leq Y$ fast sicher für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) Es gilt $X_n \to X$ in $\mathscr{L}^1(\mathscr{F})$.

(b) Es gilt $\mathbb{E}[X_n \,|\, \mathscr{G}] \to \mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{G}]$ fast sicher und in $\mathscr{L}^1(\mathscr{G})$.

2.2 Gleichmäßige Integrierbarkeit und Martingale in diskreter Zeit

Definition 2.2.1. *Eine Menge $\mathscr{X}$ von Zufallsvariablen heißt gleichmäßig integrierbar, falls*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{X\in\mathscr{X}} \mathbb{E}\big[|X|\mathbb{1}_{\{|X|\geq N\}}\big] = 0.$$

Lemma 2.2.2. *Für eine Zufallsvariable X sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt $X \in \mathscr{L}^1$.

(ii) Es gilt $\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\big[|X|\mathbb{1}_{\{|X|\geq N\}}\big] = 0$.

Beweis. Übung. □

Korollar 2.2.3. *Ist eine Menge $\mathscr{X}$ von Zufallsvariablen gleichmäßig integrierbar, dann gilt $\mathscr{X} \subset \mathscr{L}^1$.*

Beweis. Es sei $X \in \mathscr{X}$ beliebig. Dann gilt

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\big[|X|\mathbb{1}_{\{|X|\geq N\}}\big] \leq \lim_{N\to\infty} \sup_{Y\in\mathscr{X}} \mathbb{E}\big[|Y|\mathbb{1}_{\{|Y|\geq N\}}\big] = 0.$$

Also folgt mit Lemma 2.2.2, das $X \in \mathscr{L}^1$. □

Korollar 2.2.4. *Es sei $\mathscr{X}$ eine Menge von Zufallsvariablen. Falls eine Zufallsvariable $Y \in \mathscr{L}^1$ mit $|X| \leq Y$ für alle $X \in \mathscr{X}$ existiert, dann ist $\mathscr{X}$ gleichmäßig integrierbar.*

Beweis. Mit Lemma 2.2.2 folgt

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{X\in\mathscr{X}} \mathbb{E}\big[|X|\mathbb{1}_{\{|X|\geq N\}}\big] \leq \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\big[|Y|\mathbb{1}_{\{|Y|\geq N\}}\big] = 0.$$

□

Satz 2.2.5. *Für eine Menge $\mathscr{X}$ von Zufallsvariablen sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$\mathscr{X}$ ist gleichmäßig integrierbar.*

(ii) *Es gilt*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{X\in\mathscr{X}} \mathbb{E}\big[(|X|-N)^+\big] = 0.$$

(iii) *Es gilt $\sup_{X\in\mathscr{X}} \mathbb{E}[|X|] < \infty$, und zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für jedes $A \in \mathscr{F}$ mit $\mathbb{P}(A) \leq \delta$ gilt*

$$\sup_{X\in\mathscr{X}} \mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_A] \leq \epsilon.$$

(iv) *Es existiert messbare Funktion $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$, so dass*

$$\sup_{X\in\mathscr{X}} \mathbb{E}[\varphi(|X|)] < \infty.$$

In diesem Fall kann die Funktion φ aus (iv) monoton wachsend und konvex gewählt werden.

Beweis. Folgt aus [Kle06, Satz 6.17, Satz 6.19 und Satz 6.24]. □

Korollar 2.2.6. *Es sei $\mathscr{X}$ eine Menge von Zufallsvariablen. Wir nehmen an, dass ein $p > 1$ mit*

$$\sup_{X\in\mathscr{X}} \mathbb{E}[|X|^p] < \infty.$$

existiert. Dann ist $\mathscr{X}$ gleichmäßig integrierbar.

Beweis. Folgt aus Satz 2.2.5 mit $\varphi(x) = x^p$. □

Lemma 2.2.7. *Es sei $Y \in L^1$ eine Zufallsvariable. Dann ist die Familie*

$$\mathscr{X} = \{\mathbb{E}[Y\,|\,\mathscr{G}] : \mathscr{G} \text{ ist eine Sub-}\sigma\text{-Algebra von } \mathscr{F}\}$$

gleichmäßig integrierbar.

Beweis. Übung. □

Satz 2.2.8 (Allgemeine Version des Konvergenzsatzes von Lebesgue)**.** *Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^1$ eine Folge von Zufallsvariablen, und es sei X eine Zufallsvariable. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt $X_n \overset{\mathscr{L}^1}{\to} X$.

(ii) Es gilt $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$ und die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig integrierbar.

Beweis. Siehe [Kle06, Satz 6.25]. □

Satz 2.2.9 (Konvergenzsatz für gleichmäßig integrierbare Martingale)**.** *Es seien $(\mathscr{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Sub-σ-Algebren mit $\mathscr{G}_m \subset \mathscr{G}_n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$. Weiterhin sei $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein gleichmäßig integrierbares $(\mathscr{G}_n)$-Martingal; das heißt die Familie M ist gleichmäßig integrierbar und*

$$\mathbb{E}[M_n \,|\, \mathscr{G}_m] = M_m \quad \textit{für alle } m \leq n.$$

Dann existiert eine Zufallsvariable $X \in \mathscr{L}^1$, so dass $M_n \overset{f.s.}{\to} X$ und $M_n \overset{\mathscr{L}^1}{\to} X$ für $n \to \infty$, sowie $M_n = \mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{G}_n]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Siehe [JP04, Thm. 27.3]. □

Satz 2.2.10. *Es seien $(\mathscr{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Sub-σ-Algebren mit $\mathscr{G}_n \subset \mathscr{G}_m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$. Wir setzen $\mathscr{G} := \sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{G}_n)$. Dann gilt für jede integrierbare Zufallsvariable $X \in L^1(\mathscr{G})$, dass*

$$\mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{G}_n] \overset{f.s.}{\to} X \quad \textit{und} \quad \mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{G}_n] \overset{L^1}{\to} X \quad \textit{für } n \to \infty.$$

Beweis. Folgt aus dem Konvergenzsatz für gleichmäßig integrierbare Martingale (Satz 2.2.9); Details eventuell Übung. □

Satz 2.2.11 (Konvergenzsatz für Rückwärts-Martingale)**.** *Es seien $(\mathscr{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Sub-σ-Algebren mit $\mathscr{G}_n \supset \mathscr{G}_m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$. Weiterhin sei $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $(\mathscr{G}_n)$-Rückwärts-Martingal; das heißt*

$$\mathbb{E}[M_m \,|\, \mathscr{G}_n] = M_n \quad \textit{für alle } m \leq n.$$

Dann existiert eine Zufallsvariable $X \in \mathscr{L}^1$, so dass $M_n \overset{f.s.}{\to} X$ und $M_n \overset{\mathscr{L}^1}{\to} X$ für $n \to \infty$.

Beweis. Siehe [JP04, Thm. 27.4]. □

Satz 2.2.12. *Es seien* $(\mathscr{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Sub-*σ*-Algebren mit* $\mathscr{G}_n \supset \mathscr{G}_m$ *für alle* $n, m \in \mathbb{N}$ *mit* $n \le m$. *Wir setzen* $\mathscr{G} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{G}_n$. *Dann gilt für jede integrierbare Zufallsvariable* $X \in L^1(\mathscr{G})$, *dass*

$$\mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{G}_n] \overset{f.s.}{\to} X \quad \textit{und} \quad \mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{G}_n] \overset{L^1}{\to} X \quad \textit{für } n \to \infty.$$

Beweis. Folgt aus dem Konvergenzsatz für Rückwärts-Martingale (Satz 2.2.11); Details eventuell Übung. □

2.3 Martingale

Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ eine stochastische Basis.

Definition 2.3.1. *Es sei* X *ein* $\mathbb{R}$*-wertiger adaptierter càdlàg-Prozess mit* $X_t \in \mathscr{L}^1$ *für alle* $t \in \mathbb{R}_+$.

(a) *X ist ein* <u>$\mathbb{F}$-Martingal</u> *(oder kurz, ein* <u>*Martingal*</u>*), falls*

$$\mathbb{E}[X_t \,|\, \mathscr{F}_s] = X_s \quad (\mathbb{P}\textit{-fast sicher}) \quad \textit{für alle } 0 \le s \le t.$$

(b) *X ist ein* <u>$\mathbb{F}$-Submartingal</u> *(oder kurz, ein* <u>*Submartingal*</u>*), falls*

$$\mathbb{E}[X_t \,|\, \mathscr{F}_s] \ge X_s \quad (\mathbb{P}\textit{-fast sicher}) \quad \textit{für alle } 0 \le s \le t.$$

(c) *M ist ein* <u>$\mathbb{F}$-Supermartingal</u> *(oder kurz, ein* <u>*Supermartingal*</u>*), falls*

$$\mathbb{E}[X_t \,|\, \mathscr{F}_s] \le X_s \quad (\mathbb{P}\textit{-fast sicher}) \quad \textit{für alle } 0 \le s \le t.$$

Lemma 2.3.2.

(a) *Die Menge aller* $\mathbb{F}$*-Martingale ist ein Vektorraum.*

(b) *Die Menge aller* $\mathbb{F}$*-Submartingale ist ein konvexer Kegel.*

(c) *Die Menge aller* $\mathbb{F}$*-Supermartingale ist ein konvexer Kegel.*

Beweis. Übung. □

Beispiel 2.3.3. *Es sei* W *ein Wiener-Prozess mit Varianzfunktion* σ^2. *Dann ist* W *ein Martingal.*

Beweis. Übung. □

Beispiel 2.3.4. *Es sei N ein verallgemeinerter Poisson-Prozess mit Intensität a. Dann ist $X := N - a$ ein Martingal.*

Beweis. Übung. □

Lemma 2.3.5.

(a) Jeder adaptierte, monoton wachsende càdlàg-Prozess X mit $X_t \in \mathscr{L}^1$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ ist ein Submartingal.

(b) Es seien M ein Martingal und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, konvexe Funktion, so dass $\varphi(M_t) \in \mathscr{L}^1$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Dann ist der Prozess $\varphi(M)$ ein Submartingal.

(c) Es seien X ein Submartingal und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, konvexe, monoton wachsende Funktion, so dass $\varphi(X_t) \in \mathscr{L}^1$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Dann ist der Prozess $\varphi(X)$ ein Submartingal.

Beweis.

(a) Für alle $0 \leq s \leq t$ gilt $\mathbb{E}[X_t \,|\, \mathscr{F}_s] \geq \mathbb{E}[X_s \,|\, \mathscr{F}_s] = X_s$.

(b) $\varphi(M)$ ist ebenfalls ein adaptierter càdlàg-Prozess. Für alle $0 \leq s \leq t$ gilt nach der Jensen-Ungleichung

$$\mathbb{E}[\varphi(M_t) \,|\, \mathscr{F}_s] \geq \varphi(\mathbb{E}[M_t \,|\, \mathscr{F}_s]) = \varphi(M_s).$$

(c) $\varphi(X)$ ist ebenfalls ein adaptierter càdlàg-Prozess. Für alle $0 \leq s \leq t$ gilt wegen der Jensen-Ungleichung und der Monotonie von φ

$$\mathbb{E}[\varphi(X_t) \,|\, \mathscr{F}_s] \geq \varphi(\mathbb{E}[X_t \,|\, \mathscr{F}_s]) \geq \varphi(X_s).$$

□

Satz 2.3.6. *Es sei N ein $\mathbb{R}$-wertiger adaptierter Prozess mit $N_t \in \mathscr{L}^1$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$, so dass*

$$\mathbb{E}[N_t \,|\, \mathscr{F}_s] = N_s \quad (\mathbb{P}\text{-fast sicher}) \quad \text{für alle } 0 \leq s \leq t.$$

Dann existiert ein $\mathbb{F}$-Martingal M, welches eine Version von N ist.

Beweis. Siehe [KS91, Thm 1.3.13]. □

Lemma 2.3.7. *Es seien $\mathbb{G} = (\mathscr{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine Filtration und M ein $\mathbb{G}$-adaptierter càdlàg-Prozess mit $M_t \in \mathscr{L}^1$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$, so dass*

$$\mathbb{E}[M_t \,|\, \mathscr{G}_s] = M_t \quad (\mathbb{P}\text{-fast sicher}) \quad \text{für alle } 0 \leq s \leq t.$$

Dann ist M ein Martingal auf der stochastischen Basis $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{G}_+, \mathbb{P})$.

Beweis. Es seien $0 \leq s < t$ beliebig. Wegen Satz 2.2.11 und der Rechtsstetigkeit der Pfade von M gilt fast sicher

$$\mathbb{E}[M_t \,|\, \mathscr{G}_{s+}] = \mathbb{E}\left[M_t \,\middle|\, \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{G}_{s+1/n}\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[M_t \,|\, \mathscr{G}_{s+1/n}] = \lim_{n\to\infty} M_{s+1/n} = M_s.$$

□

Definition 2.3.8. *Es sei X_∞ eine Zufallsvariable. Wir sagen, dass ein Prozess X die Zufallsvariable X_∞ als Grenzwert besitzt, falls $X_t \stackrel{f.s.}{\to} X_\infty$ für $t \to \infty$.*

Bemerkung 2.3.9. *Besitzt ein Prozess X einen Grenzwert X_∞, dann ist für jede Stoppzeit T die Zufallsvariable X_T wohldefiniert.*

Satz 2.3.10. *Jedes Submartingal X mit $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathbb{E}[X_t^+] < \infty$ besitzt einen Grenzwert.*

Beweis. Siehe [RY05, Theorem II.2.10]. □

Definition 2.3.11.

(a) Ein Prozess X heißt gleichmäßig integrierbar, falls die Familie $\mathscr{X} = \{X_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ gleichmäßig integrierbar ist.

(b) Wir bezeichnen mit $\mathscr{M}$ die Menge aller gleichmäßig integrierbaren Martingale.

Lemma 2.3.12. *$\mathscr{M}$ ist ein Vektorraum.*

Beweis. Übung. □

Lemma 2.3.13. *Für einen Prozess M sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) M ist ein Martingal.

(ii) Es gilt $M^t \in \mathscr{M}$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Es sei $t \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Dann ist M^t ebenfalls ein adaptierter càdlàg-Prozess mit $M_s^t = M_{s\wedge t} \in \mathscr{L}^1$ für alle $s \in \mathbb{R}_+$. Für $0 \leq r \leq s$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_s^t \,|\, \mathscr{F}_r] &= \mathbb{E}[M_{s\wedge t} \,|\, \mathscr{F}_r] \\ &= \begin{cases} \mathbb{E}[M_{s\wedge t} \,|\, \mathscr{F}_{r\wedge t}] = M_{r\wedge t} = M_r^t, & \text{falls } r \leq t, \\ \mathbb{E}[M_t \,|\, \mathscr{F}_t] = M_t = M_{r\wedge t} = M_r^t, & \text{falls } r > t \ (\Rightarrow t < s). \end{cases}\end{aligned}$$

Also ist M^t ein Martingal. Für jedes $s \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$M_s^t = M_{s\wedge t} = \mathbb{E}[M_t \,|\, \mathscr{F}_{s\wedge t}],$$

und mit Lemma 2.2.7 folgt, dass $M^t \in \mathscr{M}$.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Nach Voraussetzung ist M ein adaptierter càdlàg-Prozess mit $M_t \in \mathscr{L}^1$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Für $0 \leq s \leq t$ gilt

$$\mathbb{E}[M_t \,|\, \mathscr{F}_s] = \mathbb{E}[M_t^t \,|\, \mathscr{F}_s] = M_s^t = M_s.$$

□

Satz 2.3.14. *Es sei M ein adaptierter càdlàg-Prozess. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt $M \in \mathscr{M}$.

(ii) M besitzt einen Grenzwert $M_\infty \in L^1(\mathscr{F}_{\infty-})$, und es gilt $M_t = \mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathscr{F}_t]$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

In diesem Fall gilt $M_t \xrightarrow{L^1} M_\infty$ für $t \to \infty$.

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i): Wegen $M_t = \mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathscr{F}_t]$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ ist M nach Lemma 2.2.7 gleichmäßig integrierbar. Außerdem gilt für alle $0 \leq s \leq t$

$$\mathbb{E}[M_t \,|\, \mathscr{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathscr{F}_t] \,|\, \mathscr{F}_s] = \mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathscr{F}_s] = M_s.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii): Aus der gleichmäßigen Integrierbarkeit von M folgt, dass $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathbb{E}[M_t^+] < \infty$, und somit besitzt M nach Satz 2.3.10 einen Grenzwert M_∞. Dieser Limes ist $\mathscr{F}_{\infty-}$-messbar, und nach dem verallgemeinerten Konvergenzsatz von Lebesgue (Satz 2.2.8) folgt $M_\infty \in L^1(\mathscr{F}_{\infty-})$ und $M_t \xrightarrow{L^1} M_\infty$. Nun seien $s \in \mathbb{R}_+$ und $A \in \mathscr{F}_s$ beliebig. Da M ein Martingal ist, gilt

$$\mathbb{E}[M_s \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[M_t \mathbb{1}_A] \quad \text{für alle } t \in [s, \infty).$$

Wegen $M_t \xrightarrow{L^1} M_\infty$ gilt außerdem

$$\mathbb{E}[M_t \mathbb{1}_A] \to \mathbb{E}[M_\infty \mathbb{1}_A] \quad \text{für } t \to \infty.$$

Also folgt

$$\mathbb{E}[M_s \mathbb{1}_A] = \lim_{t \to \infty} \mathbb{E}[M_t \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[M_\infty \mathbb{1}_A],$$

und somit $M_s = \mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathscr{F}_s]$. □

Satz 2.3.15. *Es sei $Y \in L^1(\mathscr{F})$ beliebig. Dann existiert ein bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig bestimmtes Martingal $M \in \mathscr{M}$, so dass $M_t = \mathbb{E}[Y \,|\, \mathscr{F}_t]$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und $M_\infty = \mathbb{E}[Y \,|\, \mathscr{F}_{\infty-}]$.*

Beweis. Existenz: Für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ sei N_t eine Version von $\mathbb{E}[Y \mid \mathscr{F}_t]$. Nach Satz 2.3.6 existiert ein Martingal M, welches eine Version von N, und nach Lemma 2.2.7 gilt $M \in \mathscr{M}$. Also besitzt M nach Satz 2.3.14 einen Grenzwert M_∞, und nach Satz 2.2.10 gilt fast sicher

$$M_t = \mathbb{E}[Y \mid \mathscr{F}_t] \to \mathbb{E}[Y \mid \mathscr{F}_{\infty-}] \quad \text{für } t \to \infty.$$

Also folgt $M_\infty = \mathbb{E}[Y \mid \mathscr{F}_{\infty-}]$.
Eindeutigkeit: Es seien $M, N \in \mathscr{M}$, so dass $M_t = N_t = \mathbb{E}[Y \mid \mathscr{F}_t]$ fast sicher für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Dann ist M eine Version von N, und mit Lemma 1.1.22 folgt, dass M und N ununterscheidbar sind. □

Korollar 2.3.16. *Für $M, N \in \mathscr{M}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt $M = N$ bis auf Ununterscheidbarkeit.

(ii) Es gilt $M_\infty = N_\infty$ fast sicher.

Beweis. Folgt aus den Sätzen 2.3.14 und 2.3.15. □

Definition 2.3.17.

(a) Ein Martingal $M \in \mathscr{M}$ heißt p-fach integrierbar für ein $p \in (1, \infty)$, falls $M_\infty \in L^p$.

(b) Im Fall $p = 2$ nennen wir M auch quadratintegrierbar.

(c) Für $p \in (1, \infty)$ bezeichnen wir mit $\mathscr{H}^p$ die Menge aller p-fach integrierbaren Martingale.

Bemerkung 2.3.18. *Für alle $p, q \in (1, \infty)$ mit $p \leq q$ gilt $\mathscr{H}^q \subset \mathscr{H}^p \subset \mathscr{M}$.*

Lemma 2.3.19. *Für jedes $p \in (1, \infty)$ ist $\mathscr{H}^p$ ein Vektorraum.*

Beweis. Übung. □

Satz 2.3.20. *Es sei $M \in \mathscr{H}^p$ für ein $p \in (1, \infty)$. Dann gilt $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathbb{E}[|M_t|^p] < \infty$.*

Beweis. Für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ gilt nach der Jensen-Ungleichung

$$\mathbb{E}[|M_t|^p] = \mathbb{E}[|\mathbb{E}[M_\infty \mid \mathscr{F}_t]|^p] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[|M_\infty|^p \mid \mathscr{F}_t]] = \mathbb{E}[|M_\infty|^p],$$

und daher $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathbb{E}[|M_t|^p] < \infty$. □

Lemma 2.3.21. *Es seien S, T zwei Stoppzeiten. Dann gilt für jede integrierbare Zufallsvariable $X \in L^1$*

$$\mathbb{E}[X \mid \mathscr{F}_S] \mathbb{1}_{\{S=T\}} = \mathbb{E}[X \mid \mathscr{F}_T] \mathbb{1}_{\{S=T\}}.$$

Beweis. Übung. □

Satz 2.3.22. *Für jedes $M \in \mathscr{M}$ und jede Stoppzeit T gilt $M_T = \mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathscr{F}_T]$.*

Beweis. Wir unterteilen den Beweis in zwei Schritte:

(i) Zunächst sei T von der Form $T = \sum_{k\in\mathbb{N}} t_k \mathbb{1}_{\{T=t_k\}}$ für eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$. Mit Satz 2.3.14 und Lemma 2.3.21 folgt

$$\begin{aligned} M_T &= \sum_{k\in\mathbb{N}} M_{t_k} \mathbb{1}_{\{T=t_k\}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathscr{F}_{t_k}] \mathbb{1}_{\{T=t_k\}} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathscr{F}_T] \mathbb{1}_{\{T=t_k\}} = \mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathscr{F}_T]. \end{aligned}$$

(ii) Nun sei T eine beliebige Stoppzeit. Nach Lemma 1.3.13 existiert eien monoton fallende Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten mit abzählbar vielen Werten, so dass $T_n \downarrow T$. Wegen der Rechststetigkeit der Pfade von M folgt mit Teil (i), Satz 2.2.11 sowie Lemma 1.3.11 fast sicher

$$M_T = \lim_{n\to\infty} M_{T_n} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathscr{F}_{T_n}] = \mathbb{E}\left[M_\infty \,\middle|\, \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_{T_n}\right] = \mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathscr{F}_T].$$

□

Satz 2.3.23 (Stoppsatz von Doob)**.** *Es sei M ein adaptierter càdlàg-Prozess. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt $M \in \mathscr{M}$.

(ii) M besitzt einen Grenzwert M_∞, und für jede Stoppzeit T gilt $M_T \in \mathscr{L}^1$ und $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$.

(iii) M besitzt einen Grenzwert M_∞, und für zwei Stoppzeiten $S \le T$ gilt $M_T \in \mathscr{L}^1$ und $\mathbb{E}[M_T \,|\, \mathscr{F}_S] = M_S$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Nach Satz 2.3.14 besitzt M einen Grenzwert M_∞. Es sei T eine Stoppzeit. Nach Satz 2.3.22 gilt $M_T = \mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathscr{F}_T] \in L^1$, und es folgt

$$\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathscr{F}_T]] = \mathbb{E}[M_\infty] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathscr{F}_0]] = \mathbb{E}[M_0].$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Es sei $A \in \mathscr{F}_S$ beliebig. Dann ist $R := S\mathbb{1}_A + T\mathbb{1}_{A^c}$ nach Lemma 1.3.12 ebenfalls eine Stoppzeit, und wir erhalten

$$\mathbb{E}[M_T\mathbb{1}_A + M_T\mathbb{1}_{A^c}] = \mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_R] = \mathbb{E}[M_S\mathbb{1}_A + M_T\mathbb{1}_{A^c}].$$

Es folgt

$$\mathbb{E}[M_T \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[M_S \mathbb{1}_A] \quad \text{für alle } A \in \mathscr{F}_S,$$

und somit $\mathbb{E}[M_T \,|\, \mathscr{F}_S] = M_S$.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Nach Voraussetzung gilt $M_\infty \in L^1$ und $M_t = \mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathscr{F}_t]$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Also folgt nach Satz 2.3.14, dass $M \in \mathscr{M}$. □

Korollar 2.3.24. *Es seien $M \in \mathscr{H}^2$ und $S \leq T$ zwei Stoppzeiten.*

(a) Es gilt $\mathbb{E}[(M_T - M_S)^2 \,|\, \mathscr{F}_S] = \mathbb{E}[M_T^2 - M_S^2 \,|\, \mathscr{F}_S]$.

(b) Es gilt $\mathbb{E}[(M_T - M_S)^2] = \mathbb{E}[M_T^2] - \mathbb{E}[M_S^2]$.

Beweis. Übung. □

Korollar 2.3.25.

(a) Die Klasse $\mathscr{M}$ ist stabil unter Stoppen.

(b) Die Klasse $\mathscr{C}$ aller Martingale ist stabil unter Stoppen.

(c) Für jedes $p \in (1, \infty)$ ist die Klasse $\mathscr{H}^p$ stabil unter Stoppen.

Beweis.

(a) Es seien $M \in \mathscr{M}$ und T eine Stoppzeit. Dann ist M^T ein adaptierter càdlàg-Prozess mit Grenzwert $M_\infty^T = M_T$. Für eine weitere beliebige Stoppzeit S gilt nach dem Stoppsatz von Doob (Satz 2.3.23), dass $M_S^T = M_{S \wedge T} \in L^1$ und

$$\mathbb{E}[M_S^T] = \mathbb{E}[M_{S \wedge T}] = \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_0^T].$$

Also gilt nach dem Stoppsatz von Doob (Satz 2.3.23), dass $M^T \in \mathscr{M}$.

(b) Es seien M ein Martingal und T eine Stoppzeit. Nach Lemma 2.3.13 gilt $M^t \in \mathscr{M}$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Nach Teil (a) folgt $(M^T)^t = M^{T \wedge t} = (M^t)^T \in \mathscr{M}$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Also ist M^T nach Lemma 2.3.13 ein Martingal.

(c) Es seien $M \in \mathscr{H}^p$ und T eine Stoppzeit. Wegen $M_\infty \in L^p$ gilt nach Satz 2.3.22, dass $M_\infty^T = M_T = \mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathscr{F}_T] \in L^p$, und somit $M^T \in \mathscr{H}^p$.

□

Definition 2.3.26. *Für einen rechtsstetigen Prozess X definieren wir die $\overline{\mathbb{R}}_+$-wertige Zufallsvariable*

$$X^* := \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |X_t| = \sup_{t \in \mathbb{Q}_+} |X_t|.$$

Satz 2.3.27 (Doob'sche Martingal-Ungleichung)**.** *Für alle $M \in \mathscr{M}$ und $\lambda > 0$ gilt*

$$\mathbb{P}(M^* > \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[|M_\infty| \mathbb{1}_{\{M^* > \lambda\}}]}{\lambda} \leq \frac{\mathbb{E}[|M_\infty|]}{\lambda}.$$

Beweis. Nach Satz 1.3.15 ist

$$T := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : |M_t| > \lambda\}$$

eine Stoppzeit. Wegen $\{T < \infty\} = \{M^* > \lambda\}$ folgt mit Satz 2.3.22

$$\begin{aligned}
&\lambda \mathbb{P}(M^* > \lambda) + \mathbb{E}[|M_\infty| \mathbb{1}_{\{M^* \leq \lambda\}}] = \mathbb{E}[\lambda \mathbb{1}_{\{M^* > \lambda\}} + |M_\infty| \mathbb{1}_{\{M^* \leq \lambda\}}] \\
&= \mathbb{E}[\lambda \mathbb{1}_{\{T < \infty\}} + |M_\infty| \mathbb{1}_{\{T = \infty\}}] \\
&\leq \mathbb{E}[|M_T| \mathbb{1}_{\{T < \infty\}} + |M_T| \mathbb{1}_{\{T = \infty\}}] = \mathbb{E}[|M_T|] = \mathbb{E}[|\mathbb{E}[M_\infty \mid \mathscr{F}_T]| \leq \mathbb{E}[|M_\infty|].
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\lambda \mathbb{P}(M^* > \lambda) \leq \mathbb{E}[|M_\infty|] - \mathbb{E}[|M_\infty| \mathbb{1}_{\{M^* \leq \lambda\}}] = \mathbb{E}[|M_\infty| \mathbb{1}_{\{M^* > \lambda\}}],$$

woraus sich die beiden Ungleichungen ergeben. □

Lemma 2.3.28. *Es seien $p \in (0, \infty)$ und $X \geq 0$ eine nichtnegative Zufallsvariable. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[X^p] = \int_0^\infty p \lambda^{p-1} \mathbb{P}(X > \lambda) d\lambda.$$

Beweis. Übung. □

Satz 2.3.29 (Doob'sche L^p-Ungleichung)**.** *Es seien $p \in (1, \infty)$ und $M \in \mathscr{H}^p$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[(M^*)^p]^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} \mathbb{E}[|M_\infty|^p]^{1/p}.$$

Beweis. Mit $q = \frac{p}{p-1}$ gilt $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Mit einer Rechnung wie im Beweis von Lemma 2.3.28, der Doob'schen Martingal-Ungleichung (Satz 2.3.27) und der Hölder-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(M^* \wedge n)^p] = \mathbb{E}\left[\int_0^{M^* \wedge n} p \lambda^{p-1} d\lambda\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^n p \lambda^{p-1} \mathbb{1}_{\{M^* > \lambda\}} d\lambda\right] = \int_0^n p \lambda^{p-1} \mathbb{P}(M^* > \lambda) d\lambda \\
&\leq \int_0^n p \lambda^{p-2} \mathbb{E}[|M_\infty| \mathbb{1}_{\{M^* > \lambda\}}] d\lambda = p \mathbb{E}\left[|M_\infty| \int_0^{M^* \wedge n} \lambda^{p-2} d\lambda\right] = p \mathbb{E}\left[|M_\infty| \frac{(M^* \wedge n)^{p-1}}{p-1}\right] \\
&= \frac{p}{p-1} \mathbb{E}\big[|M_\infty| (M^* \wedge n)^{p-1}\big] \leq \frac{p}{p-1} \mathbb{E}[|M_\infty|^p]^{1/p} \mathbb{E}[(M^* \wedge n)^{(p-1)q}]^{1/q} \\
&= \frac{p}{p-1} \mathbb{E}[|M_\infty|^p]^{1/p} \mathbb{E}[(M^* \wedge n)^p]^{1 - \frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit $\mathbb{E}[(M^* \wedge n)^p]^{\frac{1}{p}-1}$, so erhalten wir

$$\mathbb{E}[(M^* \wedge n)^p]^{1/p} \leq \frac{p}{p-1}\mathbb{E}[|M_\infty|^p]^{1/p} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt

$$\mathbb{E}[(M^*)^p]^{1/p} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(M^* \wedge n)^p]^{1/p} \leq \frac{p}{p-1}\mathbb{E}[|M_\infty|^p]^{1/p}.$$

□

Korollar 2.3.30 (Doob'sche L^2-Ungleichung)**.** *Für jedes $M \in \mathscr{H}^2$ gilt*

$$\mathbb{E}[(M^*)^2]^{1/2} \leq 2\mathbb{E}[|M_\infty|^2]^{1/2}.$$

Beweis. Folgt aus Satz 2.3.29 mit $p = 2$. □

Definition 2.3.31. *Für $p \in (1, \infty)$ definieren wir*

$$\mathscr{H}_0^p := \{M \in \mathscr{H}^p : M_0 = 0\},$$
$$\mathscr{H}_0^{p,c} := \{M \in \mathscr{H}_0^p : M \text{ ist stetig}\}.$$

Weiterhin setzen wir $H^p := \mathscr{H}^p/\mathcal{N}$, $H_0^p := \mathscr{H}_0^p/\mathcal{N}$ und $H_0^{p,c} := \mathscr{H}_0^{p,c}/\mathcal{N}$, wobei

$$\mathcal{N} := \{M \in \mathscr{H}^p : M = 0 \text{ bis auf Ununterschiedbarkeit}\}.$$

Satz 2.3.32. *Es sei $p \in (1, \infty)$ beliebig.*

(a) H^p versehen mit der Norm $\|M\|_{H^p} = \mathbb{E}[|M_\infty|^p]^{1/p}$ ist ein Banachraum, und $M \mapsto \mathbb{E}[|M^*|^p]^{1/p}$ definiert eine äquivalente Norm auf H^p.

(b) H_0^p ist ein abgeschlossener Unterraum von H^p.

(c) $H_0^{p,c}$ ist ein abgeschlossener Unterraum von H_0^p.

(d) Es gilt die direkte Summenzerlegung $H^p = L^p(\mathscr{F}_0) \oplus H_0^p$.

(e) H^2 ist ein Hilbertraum.

(f) Es gilt die direkte Summenzerlegung $H^2 = L^2(\mathscr{F}_0) \oplus H_0^{2,c} \oplus H_0^{2,d}$, wobei $H_0^{2,d} := (H_0^{2,c})^\perp$ im Hilbertraum H_0^2.

Beweis. Übung. □

Bemerkung 2.3.33. *Also besitzt jedes $M \in \mathscr{H}^2$ eine Zerlegung*

$$M = M_0 + M^c + M^d,$$

wobei M^c eine stetiges Martingal mit $M_0^c = 0$ ist, und M^d ein "rein unstetiges" Martingal mit $M_0^d = 0$.

2.4 Lokale Martingale

Definition 2.4.1.

(a) *Jedes $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ nennen wir ein lokales Martingal.*

(b) *Jedes $M \in \mathscr{H}^p_{\mathrm{loc}}$ für ein $p \in (1, \infty)$ nennen wir ein lokal p-fach integrierbares Martingal.*

(c) *Jedes $M \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$ nennen wir ein lokal quadratintegrierbares Martingal.*

Lemma 2.4.2.

(a) *$\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ ist ein Vektorraum.*

(b) *Für jedes $p \in (1, \infty)$ ist $\mathscr{H}^p_{\mathrm{loc}}$ ein Vektorraum.*

Beweis. Übung. □

Satz 2.4.3. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Jedes Martingal ist auch ein lokales Martingal.*

(b) *Bezeichnet $\mathscr{C}$ die Klasse aller Martingale, so gilt $\mathscr{C}_{\mathrm{loc}} = \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$.*

Beweis.

(a) Es sei M ein Martingal. Wir definieren $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $T_n := n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge von Stoppzeiten, und es gilt $M^{T_n} = M^n \in \mathscr{M}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ nach Lemma 2.3.13.

(b) Wegen $\mathscr{M} \subset \mathscr{C}$ gilt auch $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \subset \mathscr{C}_{\mathrm{loc}}$. Nach Teil (a) gilt $\mathscr{C} \subset \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$. Da $\mathscr{M}$ nach Korollar 2.3.25 stabil unter Stoppen ist, folgt mit Lemma 1.6.6, dass

$$\mathscr{C}_{\mathrm{loc}} \subset (\mathscr{M}_{\mathrm{loc}})_{\mathrm{loc}} = \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}.$$

□

Satz 2.4.4. *Es existieren eine stochastische Basis $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ und ein lokales Martingal M, das kein Martingal ist.*

Beweis. Übung. □

Satz 2.4.5. *Es sei M ein lokales Martingal mit $M_0 \in \mathscr{L}^p(\mathscr{F}_0)$ für ein $p \in (1, \infty)$, so dass ΔM lokal beschränkt ist. Dann gilt $M \in \mathscr{H}^p_{\mathrm{loc}}$.*

Beweis. Nach Voraussetzung existieren lokalisierende Folgen $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $M^{T_n} \in \mathscr{M}$ und $|(\Delta M)^{S_n}| \leq C_n$ für eine Konstante $C_n \in \mathbb{R}_+$. Nach Lemma 1.6.8 ist $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$U_n := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : |M_t| > n\}$$

ein lokalisierende Folge von Stoppzeiten. Also ist $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$R_n := T_n \wedge S_n \wedge U_n$$

eine lokalisierende Folge von Stoppzeiten. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt nach Korollar 2.3.25

$$M^{R_n} = (M^{T_n})^{S_n \wedge U_n} \in \mathscr{M}$$

und

$$\mathbb{E}\big[\big|M_\infty^{R_n}\big|^p\big] = \mathbb{E}\big[\big|M_{R_n}\big|^p\big] = \mathbb{E}\big[\big|M_{R_n-} + \Delta M_{R_n}\big|^p\big] \leq \mathbb{E}\big[\big(\max\{M_0, n\} + C_n\big)^p\big] < \infty,$$

und somit $M^{R_n} \in \mathscr{H}^p$. $\square$

Korollar 2.4.6. *Es sei M ein stetiges, lokales Martingal mit $M_0 \in \mathscr{L}^p(\mathscr{F}_0)$ für ein $p \in (1,\infty)$. Dann gilt $M \in \mathscr{H}^p_{\text{loc}}$.*

Beweis. Folgt aus Satz 2.4.5. $\square$

Bemerkung 2.4.7. *Es sei W ein Standard-Wiener-Prozess. Dann ist W ein Martingal mit $W \notin \mathscr{M}$, jedoch $W \in \mathscr{H}^2_{\text{loc}}$.*

Definition 2.4.8. *Ein Prozess X gehört zur Klasse (D), falls die Familie*

$$\mathscr{X} = \{X_T : T \text{ ist eine endliche Stoppzeit}\}$$

gleichmäßig integrierbar ist.

Satz 2.4.9. *Für $M \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt $M \in \mathscr{M}$.

(ii) M gehört zur Klasse (D).

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Nach Satz 2.3.22 gilt

$$M_T = \mathbb{E}[M_\infty \,|\, \mathscr{F}_T] \quad \text{für jede Stoppzeit } T.$$

Also gehört M nach Lemma 2.2.7 zur Klasse (D).

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es sei $M \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$ zur Klasse (D) gehörig. Dann ist M gleichmäßig integrierbar. Es sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge für M. Weiterhin seien $0 \leq s \leq t$ beliebig. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$M_{s\wedge T_n} = M_s^{T_n} = \mathbb{E}[M_t^{T_n} \,|\, \mathscr{F}_s] = \mathbb{E}[M_{t\wedge T_n} \,|\, \mathscr{F}_s].$$

Da M zur Klasse (D) gehört, sind die beiden Folgen $(M_{s\wedge T_n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(M_{t\wedge T_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig integrierbar. Wegen $T_n \overset{\text{f.s.}}{\to} \infty$ gilt $M_{s\wedge T_n} \overset{\text{f.s.}}{\to} M_s$ und $M_{t\wedge T_n} \overset{\text{f.s.}}{\to} M_t$. Nach nach dem verallgemeinerten Konvergenzsatz von Lebesgue (Satz 2.2.8) folgt $M_s, M_t \in L^1$ und $M_{s\wedge T_n} \overset{L^1}{\to} M_s$, $M_{t\wedge T_n} \overset{L^1}{\to} M_t$, und damit

$$\mathbb{E}[|\mathbb{E}[M_{t\wedge T_n} \,|\, \mathscr{F}_s] - \mathbb{E}[M_t \,|\, \mathscr{F}_s]|] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[|M_{t\wedge T_n} - M_t| \,|\, \mathscr{F}_s]] = \mathbb{E}[|M_{t\wedge T_n} - M_t|] \to 0.$$

Also gilt

$$\mathbb{E}[M_{t\wedge T_n} \,|\, \mathscr{F}_s] \overset{L^1}{\to} \mathbb{E}[M_t \,|\, \mathscr{F}_s].$$

Insgesamt folgt im Sinne der L^1-Konvergenz

$$\mathbb{E}[M_t \,|\, \mathscr{F}_s] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[M_{t\wedge T_n} \,|\, \mathscr{F}_s] = \lim_{n\to\infty} M_{s\wedge T_n} = M_s,$$

was zeigt, dass M ein Martingal ist. □

Korollar 2.4.10. *Für jedes beschränkte $M \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$ gilt $M \in \mathscr{M}$.*

Beweis. Folgt aus Satz 2.4.9. □

Kapitel 3

Previsible Sigma-Algebren und previsible Zeiten

Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ eine stochastische Basis.

3.1 Die previsible Sigma-Algebra

Definition 3.1.1.

(a) Wir definieren die previsible σ-Algebra $\mathscr{P}$ über $\Omega \times \mathbb{R}_+$ durch

$$\mathscr{P} := \sigma(X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \,|\, X \text{ ist adaptiert und linksstetig}).$$

(b) Ein $\mathscr{P}$-messbarer Prozess X heißt ein previsibler Prozess.

(c) Eine $\mathscr{P}$-messbare zufällige Menge A heißt eine previsible Menge.

Korollar 3.1.2. *Es gilt $\mathscr{P} \subset \mathscr{O}$.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 1.4.8. □

Lemma 3.1.3. *Die Menge aller previsiblen Prozesse ist ein Vektorraum.*

Beweis. Übung. □

Korollar 3.1.4. *Es sei X ein Prozess.*

(a) Ist X adaptiert und linksstetig, dann ist X auch previsibel.

(b) Ist X previsibel, dann ist X auch optional.

(c) Ist X optional, dann ist X auch adaptiert und messbar.

Beweis.

(a) Folgt aus Definition 3.1.1.

(b) Folgt aus Korollar 3.1.2.

(c) Folgt aus Satz 1.4.5.

□

Satz 3.1.5. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $\mathscr{P} = \sigma\big(\{A \times \{0\} : A \in \mathscr{F}_0\} \cup \{ [\![0, T]\!] : T \text{ ist eine Stoppzeit}\}\big)$.

(b) $\mathscr{P} = \sigma\big(\{A \times \{0\} : A \in \mathscr{F}_0\} \cup \{A \times (s, t] : s < t \text{ und } A \in \mathscr{F}_s\}\big)$.

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathscr{P}'$ und $\mathscr{P}''$ die in (a) und (b) erzeugten σ-Algebren.

(i) Prozesse der Form $X = \mathbb{1}_{A\times\{0\}}$ mit $A \in \mathscr{F}_0$ und $X = \mathbb{1}_{[\![0,T]\!]}$ mit einer Stoppzeit T sind linksstetig. Weiterhin sind sie adaptiert, denn für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ ist

$$\begin{aligned} X_t &= \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{t=0\}} \quad \text{bezüglich } \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_t \text{ messbar} \quad \text{bzw.} \\ X_t &= \mathbb{1}_{\{T \geq t\}} \quad \text{bezüglich } \mathscr{F}_t \text{ messbar.} \end{aligned}$$

Somit gilt $\mathscr{P}' \subset \mathscr{P}$.

(ii) Es seien $s < t$ und $A \in \mathscr{F}_s$ beliebig. Nach Lemma 1.3.12 sind s_A und t_A Stoppzeiten. Also gilt

$$A \times (s, t] =]\!]s_A, t_A]\!] = [\![0, t_A]\!] \setminus [\![0, s_A]\!] \in \mathscr{P}',$$

und es folgt $\mathscr{P}'' \subset \mathscr{P}'$.

(iii) Es sei X ein adaptierter, linksstetiger Prozess. Wir definieren die Prozesse $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$X^n := X_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k\in\mathbb{N}} X_{\frac{k-1}{2^n}} \mathbb{1}_{(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Da X adaptiert ist, gilt für $n \in \mathbb{N}$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\{X^n \in B\} = (\underbrace{\{X_0 \in B\}}_{\in \mathscr{F}_0} \times \{0\}) \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(\underbrace{\{X_{\frac{k-1}{2^n}} \in B\}}_{\in \mathscr{F}_{\frac{k-1}{2^n}}} \times \Big(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\Big] \right) \in \mathscr{P}''.$$

Da X linksstetig ist, gilt nach Lemma 1.2.3, dass $X^n \to X$ auf $\Omega \times \mathbb{R}_+$, und folglich ist X ein $\mathscr{P}''$-messbarer Prozess. Dies beweist $\mathscr{P} \subset \mathscr{P}''$.

□

Satz 3.1.6. *Es sei X ein previsibler Prozess. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $X_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}$ *ist* $\mathscr{F}_{T-}$*-messbar für jede Stoppzeit* T.

(b) X^T *ist previsibel für jede Stoppzeit* T.

Beweis. Nach dem Satz über monotone Klassen (Satz 1.4.4) genügt es, die Eigenschaften (a) und (b) für folgende Prozesse zu beweisen:

(1) Für alle $X = \mathbb{1}_{A\times\{0\}}$ mit $A \in \mathscr{F}_0$. Hierzu sei T eine Stoppzeit. Dann ist

$$X_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{T=0\}} = \mathbb{1}_{A\cap\{T=0\}}$$

gemäß Definition 1.3.6 messbar bezüglich $\mathscr{F}_{T-}$, so dass (a) erfüllt ist. Da X adaptiert und linksstetig ist, ist X^T auch adaptiert und linksstetig, so dass (b) gilt.

(2) Für alle $X = \mathbb{1}_{A\times(s,t]}$ mit $s, t \in \mathbb{R}_+$, so dass $s < t$, und $A \in \mathscr{F}_s$. Hierzu sei T eine Stoppzeit. Dann ist

$$X_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{T\in(s,t]\}} = \mathbb{1}_A\big(\mathbb{1}_{\{T>s\}} - \mathbb{1}_{\{T>t\}}\big) = \mathbb{1}_{A\cap\{s<T\}} - \mathbb{1}_{A\cap\{t<T\}}$$

gemäß Definition 1.3.6 messbar bezüglich $\mathscr{F}_{T-}$, so dass (a) erfüllt ist. Da X adaptiert und linksstetig ist, ist X^T auch adaptiert und linksstetig, so dass (b) gilt.

□

Satz 3.1.7. *Es seien S, T zwei Stoppzeiten und Y eine $\mathscr{F}_S$-messbare Zufallsvariable. Dann ist der Prozess $Y\mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]}$ previsibel.*

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $Y = \mathbb{1}_A$ für ein $A \in \mathscr{F}_S$. Der Prozess $X = Y\mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]}$ ist linksstetig, und für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ ist nach Lemma 1.3.10

$$X_t = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{S<t\leq T\}} = \mathbb{1}_{A\cap\{S<t\}} \mathbb{1}_{\{T\geq t\}} \quad \text{bezüglich } \mathscr{F}_t \text{ messbar.}$$

Folglich ist X adaptiert, und damit insbesondere previsibel. □

Satz 3.1.8. *Es sei X ein adaptierter càdlàg-Prozess.*

(a) X_- *ist previsibel.*

(b) Ist X previsibel, dann ist ΔX auch previsibel.

Beweis.

(a) Folgt aus Definition 3.1.1, da X_- nach Lemma 1.1.26 adaptiert und linksstetig ist.

(b) Folgt aus $\Delta X = X - X_-$.

□

3.2 Previsible Zeiten

Definition 3.2.1. *Eine Abbildung $T : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ heißt eine $\underline{\mathbb{F}\text{-previsible Zeit}}$ (oder kurz, eine previsible Zeit), falls $[\![0, T[\![\in \mathscr{P}$.*

Lemma 3.2.2. *Jede previsible Zeit T ist eine Stoppzeit.*

Beweis. Nach Korollar 3.1.2 gilt $[\![T, \infty[\![= (\Omega \times \mathbb{R}_+) \setminus [\![0, T[\![\in \mathscr{P} \subset \mathscr{O}$, und somit ist der càdlàg-Prozess $X = \mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![}$ optional, und damit nach Satz 1.4.5 auch adaptiert. Also gilt $\{T \leq t\} = \{X_t = 1\} \in \mathscr{F}_t$ für jedes $t \in \mathbb{R}_+$. □

Lemma 3.2.3. *Eine Stoppzeit T ist genau dann eine previsible Zeit, wenn $[\![T]\!] \in \mathscr{P}$.*

Beweis. Nach Satz 3.1.5 gilt $[\![0, T]\!] \in \mathscr{P}$. Ist T eine previsible Zeit, dann folgt

$$[\![T]\!] = [\![0, T]\!] \setminus [\![0, T[\![\in \mathscr{P},$$

und ist $[\![T]\!] \in \mathscr{P}$, dann folgt

$$[\![0, T[\![= [\![0, T]\!] \setminus [\![T]\!] \in \mathscr{P}.$$

□

Lemma 3.2.4. *Es seien T eine Stoppzeit und $t > 0$. Dann ist $T + t$ eine previsible Zeit.*

Beweis. Für alle $(\omega, s) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$ gilt

$$\begin{aligned} & (\omega, s) \in [\![0, T + t[\![\\ \Leftrightarrow \quad & T(\omega) + t > s \\ \Leftrightarrow \quad & T(\omega) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) t \geq s \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow \quad & (\omega, s) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\!\!\left[0, T + \left(1 - \frac{1}{n}\right) t\right]\!\!\right]. \end{aligned}$$

Nach Satz 3.1.5 folgt

$$[\![0, T + t[\![= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\!\!\left[0, T + \left(1 - \frac{1}{n}\right) t\right]\!\!\right] \in \mathscr{P}.$$

□

Korollar 3.2.5. *$T = t$ für jedes $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ eine previsible Zeit, und damit eine Stoppzeit.*

Lemma 3.2.6. *Es sei $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von previsiblen Zeiten.*

(a) $T = \sup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ *ist eine previsible Zeit.*

(b) $S = \inf_{n\in\mathbb{N}} T_n$ *ist eine previsible Zeit, sofern* $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{S = T_n\}$.

Beweis.

(a) Für alle $(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$ gilt

$$\begin{aligned} & (\omega,t) \in [\![0,T[\![\\ \Leftrightarrow\ & T(\omega) > t \\ \Leftrightarrow\ & T_n(\omega) > t \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow\ & (\omega,t) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![0,T_n[\![. \end{aligned}$$

Daraus folgt $[\![0,T[\![= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\![0,T_n[\![\in \mathscr{P}$.

(b) Es seien $(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$ beliebig. Es gelte $T_n(\omega) > t$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{S = T_n\}$ existiert ein Index $m \in \mathbb{N}$, so dass $S(\omega) = T_m(\omega)$, und es folgt $S(\omega) > t$. Also gilt

$$\begin{aligned} & (\omega,t) \in [\![0,S[\![\\ \Leftrightarrow\ & S(\omega) > t \\ \Leftrightarrow\ & T_n(\omega) > t \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow\ & (\omega,t) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [\![0,T_n[\![. \end{aligned}$$

Daraus folgt $[\![0,S[\![= \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[\![0,T_n[\![\in \mathscr{P}$.

□

Bemerkung 3.2.7. *Es sei S eine Stoppzeit, die nicht previsibel ist. Nach Lemma 3.2.4 ist die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $T_n := S + \frac{1}{n}$ eine Folge von previsiblen Zeiten. Es gilt jedoch $S = \inf_{n\in\mathbb{N}} T_n$.*

Lemma 3.2.8. *Es seien T eine previsible Zeit und $A \in \mathscr{F}_{T-}$. Dann ist*

$$T_A := T\mathbb{1}_A + \infty\mathbb{1}_{A^c}$$

eine previsible Zeit.

Beweis. Es sei T eine previsible Zeit. Wir definieren die Mengensysteme

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &:= \{A \in \mathscr{F} : T_A \text{ ist eine previsible Zeit}\}, \\ \mathscr{G} &:= \mathscr{F}_0 \cup \{B \cap \{t < T\} : t \in \mathbb{R}_+ \text{ und } B \in \mathscr{F}_t\} \end{aligned}$$

Dann ist $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra über Ω. (Übung.)

Außerdem gilt $\mathscr{G} \subset \mathscr{A}$. (Übung.)

Insgesamt folgt

$$\mathscr{F}_{T-} = \sigma(\mathscr{G}) \subset \sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{A}.$$

□

Lemma 3.2.9. *Es seien S eine previsible Zeit, $A \in \mathscr{F}_{S-}$ und T eine Stoppzeit. Dann gilt $A \cap \{S \le T\}, A \cap \{S < T\}, A \cap \{S = T\} \in \mathscr{F}_{T-}$.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} A \cap \{S \le T\} &= (A \cap \{S \le T\} \cap \{T < \infty\}) \cup (A \cap \{S \le T\} \cap \{T = \infty\}) \\ &= (A \cap \{S \le T < \infty\}) \cup (A \cap \{S \le T = \infty\}) \\ &= \{S_A \le T < \infty\} \cup (A \cap \{T = \infty\}). \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.2.8 ist S_A eine previsible Zeit, so dass folgt

$$[\![S_A, \infty[\![= (\Omega \times \mathbb{R}_+) \setminus [\![0, S_A[\![\in \mathscr{P}.$$

Also ist der Prozess $X = \mathbb{1}_{[\![S_A,\infty[\![}$ previsibel, und mit Satz 3.1.6 folgt

$$\{S_A \le T < \infty\} = \{X_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} = 1\} \in \mathscr{F}_{T-}.$$

Wegen $\mathscr{F}_{S-} \subset \mathscr{F}_{\infty-}$ gilt $A \in \mathscr{F}_{\infty-}$. Wir definieren $\mathscr{C} := \bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathscr{F}_t$ und das Mengensystem $\mathscr{H} \subset \mathscr{F}_{\infty-}$ durch

$$\mathscr{H} := \{A \in \mathscr{F}_{\infty-} : A \cap \{T = \infty\} \in \mathscr{F}_{T-}\}.$$

Dann gilt $\mathscr{C} \subset \mathscr{H}$. (Übung.) Außerdem ist $\mathscr{H}$ eine σ-Algebra über Ω. (Übung.)

Daraus folgt

$$\mathscr{F}_{\infty-} = \sigma(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{H}) = \mathscr{H} \subset \mathscr{F}_{\infty-}.$$

Also gilt $\mathscr{H} = \mathscr{F}_{\infty-}$, was $A \cap \{S \le T\} \in \mathscr{F}_{T-}$ beweist. Die restlichen Aussagen folgen mit Lemma 1.3.10. □

Lemma 3.2.10. *Es seien S, T zwei Stoppzeiten und Y eine Zufallsvariable.*

(a) Falls T previsibel und Y eine $\mathscr{F}_S$-messbare Zufallsvariable ist, dann ist der Prozess $Y\mathbb{1}_{]\!]S,T[\![}$ previsibel.

(b) Falls S previsibel und Y eine $\mathscr{F}_{S-}$-messbare Zufallsvariable ist, dann ist der Prozess $Y\mathbb{1}_{[\![S,T]\!]}$ previsibel.

(c) Falls S und T previsibel sind und Y eine $\mathscr{F}_{S-}$-messbare Zufallsvariable ist, dann ist der Prozess $Y\mathbb{1}_{[\![S,T[\![}$ previsibel.

Beweis.

(a) Folgt wegen $Y\mathbb{1}_{]\!]S,T[\![} = (Y\mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]})\mathbb{1}_{[\![0,T[\![}$ mit Satz 3.1.7.

(b) Wir dürfen annehmen, dass $Y = \mathbb{1}_A$ mit $A \in \mathscr{F}_{S-}$. Für jedes $(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$ gilt

$$\begin{aligned} & \omega \in A \text{ und } (\omega, t) \in [\![S, T]\!] \\ \Leftrightarrow \quad & \omega \in A \text{ und } S(\omega) \leq t \leq T(\omega) \\ \Leftrightarrow \quad & S_A(\omega) \leq t \leq T(\omega) \\ \Leftrightarrow \quad & (\omega, t) \in [\![S_A, T]\!]. \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.2.8 ist S_A previsibel. Also ist

$$Y\mathbb{1}_{[\![S,T]\!]} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{[\![S,T]\!]} = \mathbb{1}_{[\![S_A,T]\!]} = \mathbb{1}_{[\![0,T]\!]} - \mathbb{1}_{[\![0,S_A[\![}$$

previsibel.

(c) Folgt wegen $Y\mathbb{1}_{[\![S,T[\![} = (Y\mathbb{1}_{[\![S,T]\!]})\mathbb{1}_{[\![0,T[\![}$ mit Teil (b).

□

Lemma 3.2.11. *Es sei $A \in \mathscr{P}$ eine previsible dünne Menge.*

(a) Es existiert eine ausschöpfende Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von previsiblen Zeiten, so dass bis auf eine vernachlässigbare Menge

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![T_n]\!].$$

(b) Falls die stochastische Basis $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ sei vollständig ist, dann existiert sogar eine ausschöpfende Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von previsiblen Zeiten, so dass

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![T_n]\!].$$

Beweis. Siehe [JS03, Lemma I.2.23]. □

Lemma 3.2.12. *Es sei X ein previsibler càdlàg-Prozess. Dann existiert eine ausschöpfende Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von previsiblen Zeiten, so dass*

$$\{\Delta X \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![T_n]\!].$$

Beweis. Siehe [JS03, Prop. I.2.24]. □

Satz 3.2.13. *Es sei X ein adaptierter càdlàg-Prozess. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) X ist previsibel.

(ii) Es existiert eine ausschöpfende Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von previsiblen Zeiten, so dass

$$\{\Delta X \neq 0\} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![T_n]\!],$$

und für jede previsible Zeit T ist $X_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}$ bezüglich $\mathscr{F}_{T-}$ messbar.

Beweis. (i) ⇒ (ii): Folgt aus Lemma 3.2.12 und Satz 3.1.6.
(ii) ⇒ (i): Wie definieren die zufällige Menge

$$A := (\Omega \times \mathbb{R}_+) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![T_n]\!].$$

Nach Lemma 3.2.3 gilt $A \in \mathscr{P}$. Außerdem gilt die Darstellung

$$X = X_- \mathbb{1}_A + \sum_{n\in\mathbb{N}} X_{T_n} \mathbb{1}_{[\![T_n]\!]}.$$

Also ist X nach Lemma 3.2.10(b) previsibel. □

Lemma 3.2.14. *Es seien $A \in \mathscr{P}$ eine previsible Menge, und $T : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ gegeben durch*

$$T(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : (\omega, t) \in A\}.$$

Falls T eine Stoppzeit ist und $[\![T]\!] \subset A$ gilt, dann ist T eine previsible Zeit.

Beweis. Für alle $(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$ gilt

$$\begin{aligned} & (\omega, t) \in A \cap [\![0, T]\!] \\ \Leftrightarrow\quad & (\omega, t) \in A \text{ und } T(\omega) \geq t \\ \Leftrightarrow\quad & (\omega, t) \in A \text{ und } T(\omega) = t \quad \text{(wegen der Definition von } T) \\ \Leftrightarrow\quad & (\omega, t) \in A \text{ und } (\omega, t) \in [\![T]\!] \\ \Leftrightarrow\quad & (\omega, t) \in A \cap [\![T]\!] = [\![T]\!]. \end{aligned}$$

Also ist $[\![T]\!] = A \cap [\![0, T]\!] \in \mathscr{P}$, und T somit nach Lemma 3.2.3 eine previsible Zeit. □

Satz 3.2.15 (Satz vom previsiblen Schnitt)**.** *Es seien $A \in \mathscr{P}$ eine previsible Menge und $N \in \mathscr{F}$ eine Menge mit*

$$N \subset \{\omega \in \Omega : (\omega, t) \in A \text{ für ein } t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ eine previsible Zeit T mit $[\![T]\!] \subset A$, so dass

$$\mathbb{P}(\{T = \infty\} \cap N) \leq \epsilon.$$

Beweis. Dies folgt aus [JS03, Theorem 2.14 und Remark 2.19]. □

Definition 3.2.16. *Es seien $A, B \in \mathscr{F}$.*

(a) Wir sagen, dass A auf B gilt, falls $B \subset A$; das heißt $A \cap B = B$.

(b) Wir sagen, dass A fast sicher auf B gilt, falls $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$.

Satz 3.2.17. *Es sei T eine Stoppzeit.*

(a) Falls eine monoton wachsende Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten mit $T_n \uparrow T$ und $T_n < T$ auf $\{T > 0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert, dann ist T eine previsible Zeit.

(b) Falls T eine previsible Zeit ist, dann existiert eine monoton wachsende Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten, so dass $T_n \uparrow T$ fast sicher und $T_n < T$ fast sicher auf $\{T > 0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Die stochastische Basis $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ sei vollständig. Falls T eine previsible Zeit ist, dann existiert eine monoton wachsende Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten, so dass $T_n \uparrow T$ und $T_n < T$ auf $\{T > 0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis.

(a) Es sei $(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$ beliebig. Falls $T(\omega) > 0$, dann gilt $T_n(\omega) < T(\omega)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, und daher

$$\begin{aligned} & (\omega, t) \in]\!]0, T[\![\\ \Leftrightarrow \quad & 0 < t < T(\omega) \\ \Leftrightarrow \quad & 0 < t \leq T_n(\omega) \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow \quad & (\omega, t) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]\!]0, T_n]\!]. \end{aligned}$$

Falls $T(\omega) = 0$, dann gilt $T_n(\omega) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, und daher

$$\begin{aligned} & (\omega, t) \in]\!]0, T[\![\\ \Leftrightarrow \quad & (\omega, t) \in \emptyset \\ \Leftrightarrow \quad & (\omega, t) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]\!]0, T_n]\!]. \end{aligned}$$

Es folgt $]\!]0,T[\![= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]\!]0,T_n]\!]$, und daher

$$[\![0,T[\![= [\![0]\!] \cup]\!]0,T[\![= [\![0]\!] \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]\!]0,T_n]\!] \right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![0,T_n]\!] \in \mathscr{P}.$$

(b) Siehe [Del72].

(c) Siehe [Del72].

□

Bemerkung 3.2.18. *In der Situation von Satz 3.2.17 nennen wir die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ankündigende Folge der previsiblen Zeit T.*

Satz 3.2.19.

(a) Es sei $A \in \mathscr{P}$ eine previsible Menge. Falls für jede previsible Zeit T mit $[\![T]\!] \subset A$ gilt, dass $\mathbb{P}(T = \infty) = 1$, dann ist A vernachlässigbar.

(b) Es seien X und Y zwei previsible Prozesse, so dass $X_T = Y_T$ fast sicher auf $\{T < \infty\}$ für jede previsible Zeit T. Dann sind X und Y ununterscheidbar.

(c) Es seien X und Y zwei previsible Prozesse, so dass $X_T \leq Y_T$ fast sicher auf $\{T < \infty\}$ für jede previsible Zeit T. Dann gilt $X \leq Y$ bis auf Ununterscheidbarkeit.

Beweis.

(a) Angenommen, die Menge A ist nicht vernachlässigbar. Dann existiert eine Menge $N \in \mathscr{F}$ mit

$$N \subset \{\omega \in \Omega : (\omega,t) \in A \text{ für ein } t \in \mathbb{R}_+\}$$

und $\epsilon > 0$, wobei $\epsilon := \mathbb{P}(N)$. Nach dem Satz vom previsiblen Schnitt (Satz 3.2.15) existiert eine previsible Zeit T mit $[\![T]\!] \subset A$, so dass

$$\mathbb{P}(\{T = \infty\} \cap N) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\epsilon}{2} &\leq 1 - \mathbb{P}(\{T = \infty\} \cap N) = \mathbb{P}((\{T = \infty\} \cap N)^c) = \mathbb{P}(\{T < \infty\} \cup N^c) \\ &\leq \mathbb{P}(T < \infty) + \mathbb{P}(N^c) = \mathbb{P}(T < \infty) + 1 - \epsilon. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\mathbb{P}(T < \infty) \geq \frac{\epsilon}{2}$, und damit $\mathbb{P}(T = \infty) < 1$. Dies widerspricht der Voraussetzung $\mathbb{P}(T = \infty) = 1$.

(b) Es gilt $\{X \neq Y\} \in \mathscr{P}$. Es sei T eine previsible Zeit mit $[\![T]\!] \subset \{X \neq Y\}$. Dann gilt für jedes $\omega \in \Omega$ mit $T(\omega) < \infty$, dass $(\omega, T(\omega)) \in [\![T]\!] \subset \{X \neq Y\}$, und damit $X_{T(\omega)}(\omega) \neq Y_{T(\omega)}(\omega)$. Es folgt $\{T < \infty\} \subset \{X_T \neq Y_T\}$, und wegen $X_T = Y_T$ fast sicher auf $\{T < \infty\}$ folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T < \infty) &= \mathbb{P}(\{T < \infty\} \cap \{X_T = Y_T\}) \leq \mathbb{P}(\{X_T \neq Y_T\} \cap \{X_T = Y_T\}) \\ &= \mathbb{P}(\emptyset) = 0.\end{aligned}$$

Also gilt $\mathbb{P}(T = \infty) = 1$. Nach Teil (a) ist $\{X \neq Y\}$ vernachlässigbar.

(c) Analoger Beweis. (Übung.)

□

3.3 Orthogonale Stoppzeiten

Definition 3.3.1. *Eine Stoppzeit T heißt erreichbar (durch previsible Zeiten), falls eine Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von previsiblen Zeiten existiert, so dass*

$$[\![T]\!] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\![T_n]\!].$$

Bemerkung 3.3.2. *Zu jedem $\omega \in \Omega$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $T(\omega) = T_n(\omega)$.*

Bemerkung 3.3.3. *Jede previsible Zeit ist erreichbar.*

Definition 3.3.4. *Eine Stoppzeit T heißt orthogonal (zu allen previsiblen Zeiten), falls $\mathbb{P}(T = S < \infty) = 0$ für jede previsible Zeit S.*

Bemerkung 3.3.5. *Mit anderen Worten, für jede previsible Zeit S gilt $[\![T]\!] \cap [\![S]\!] = \emptyset$ bis auf eine vernachlässigbare Menge.*

Bemerkung 3.3.6. *$T = \infty$ ist eine orthogonale Stoppzeit, wohingegen $T = t$ für $t \in \mathbb{R}_+$ keine orthogonale Stoppzeit ist.*

Lemma 3.3.7. *Es seien T eine orthogonale Stoppzeit und S eine Stoppzeit mit $[\![S]\!] \subset [\![T]\!]$. Dann ist S auch orthogonal.*

Beweis. Es sei R eine previsible Zeit. Wegen $[\![S]\!] \subset [\![T]\!]$ und $[\![T]\!] \cap [\![R]\!] = \emptyset$ bis auf eine vernachlässigbare Menge gilt auch $[\![S]\!] \cap [\![R]\!] = \emptyset$ bis auf eine vernachlässigbare Menge. □

Lemma 3.3.8. *Falls eine Stoppzeit T erreichbar und orthogonal ist, dann gilt $T = \infty$ fast sicher.*

Beweis. Da T erreichbar ist, existiert eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von previsiblen Zeiten existiert, so dass

$$[\![T]\!] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![T_n]\!].$$

Da T orthogonal ist, gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass $[\![T]\!] \cap [\![T_n]\!] = \emptyset$ bis auf eine vernachlässigbare Menge. Daraus folgt

$$[\![T]\!] = [\![T]\!] \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![T_n]\!] \right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left([\![T]\!] \cap [\![T_n]\!] \right) = \emptyset$$

bis auf eine vernachlässigbare Menge. Also gilt $T = \infty$ fast sicher. □

Satz 3.3.9. *Es sei T eine Stoppzeit. Dann existiert eine $\mathbb{P}$-fast sicher eindeutig bestimmte Menge $A \in \mathscr{F}_T$ mit $A \subset \{T < \infty\}$, so dass die Stoppzeit T_A orthogonal und T_{A^c} erreichbar ist.*

Beweis. Siehe [JS03, Thm. I.2.22]. □

Definition 3.3.10. *Die $\mathbb{P}$-fast sicher eindeutig bestimmte Stoppzeit T_A aus Satz 3.3.9 heißt der orthogonale Anteil von T, und die Stoppzeit T_{A^c} heißt der erreichbare Anteil von T.*

Bemerkung 3.3.11.

(a) Es gilt $T = T_A \wedge T_{A^c}$.

(b) Es gilt die Zerlegung $[\![T]\!] = [\![T_A]\!] \cup [\![T_{A^c}]\!]$.

Lemma 3.3.12. *Es sei T eine Stoppzeit.*

(a) Ist T orthogonal, dann ist der orthogonale Anteil gegeben durch $T_A = T$; das heißt $A = \{T < \infty\}$.

(b) Ist T erreichbar, dann ist der orthogonale Anteil gegeben durch $T_A = \infty$; das heißt $A = \emptyset$.

Beweis. Übung. □

Satz 3.3.13. *Es sei $A \in \mathscr{O}$ eine optionale dünne Menge. Dann existiert eine ausschöpfende Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten, so dass*

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![T_n]\!],$$

und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist T_n entweder orthogonal oder erreichbar.

Beweis. Folgt aus Lemma 1.4.12 und Satz 3.3.9. □

Satz 3.3.14. *Es sei $A \in \mathscr{O}$ eine optionale dünne Menge. Dann existiert eine ausschöpfende Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten, so dass*

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![T_n]\!],$$

und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist T_n entweder orthogonal oder previsibel.

Beweis. Folgt aus Satz 3.3.13 und einer Prozedur wie im Beweis von Lemma 1.4.12. □

Satz 3.3.15. *Es sei X ein adaptierter càdlàg-Prozess. Wir nehmen an, dass eine ausschöpfende Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von previsiblen Zeiten existiert, so dass*

$$\{\Delta X \neq 0\} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![T_n]\!].$$

Dann gilt $\Delta X_T = 0$ fast sicher auf $\{T < \infty\}$ für jede orthogonale Stoppzeit T.

Beweis. Es sei T eine orthogonale Stoppzeit. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\Delta X_T \neq 0\} \cap \{T < \infty\}) &\leq \mathbb{P}\bigg(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{T = T_n < \infty\}\bigg) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(T = T_n < \infty) = 0.\end{aligned}$$

□

Korollar 3.3.16. *Es sei X ein previsibler càdlàg-Prozess. Dann gilt $\Delta X_T = 0$ fast sicher auf $\{T < \infty\}$ für jede orthogonale Stoppzeit T.*

Beweis. Folgt aus Lemma 3.2.12 und Satz 3.3.15. □

Definition 3.3.17. *Ein adaptierter càdlàg-Prozess X heißt quasi-linksstetig, falls $\Delta X_T = 0$ fast sicher auf $\{T < \infty\}$ für jede previsible Zeit T.*

Lemma 3.3.18. *Die Menge aller quasi-linksstetigen Prozesse ist ein Vektorraum.*

Beweis. Übung. □

Lemma 3.3.19. *Es sei X ein previsibler, quasi-linksstetiger Prozess. Dann ist X stetig bis auf eine vernachlässigbare Menge.*

Beweis. Übung. □

Satz 3.3.20. *Es sei X ein adaptierter càdlàg-Prozess. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *X ist quasi-linksstetig.*

(ii) *Es existiert eine ausschöpfende Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von orthogonalen Stoppzeiten, so dass*

$$\{\Delta X \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![T_n]\!].$$

(iii) *Für jede Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von monoton wachsenden Stoppzeiten gilt $\lim_{n\to\infty} X_{T_n} = X_T$ fast sicher auf $\{T < \infty\}$, wobei $T = \sup_{n\in\mathbb{N}} T_n$.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Nach Korollar 1.4.14 existiert eine ausschöpfende Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten, so dass

$$\{\Delta X \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![T_n]\!].$$

Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Weiterhin sei T eine beliebige previsible Zeit. Dann gilt $\Delta X_T = 0$ fast sicher auf $\{T < \infty\}$, und daher $[\![T_n]\!] \cap [\![T]\!] = \emptyset$ bis auf eine vernachlässigbare Menge. Also ist die Stoppzeit T_n orthogonal.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Es sei T eine previsible Zeit. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\Delta X_T \neq 0\} \cap \{T < \infty\}) &= \mathbb{P}\bigg(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{T = T_n < \infty\}\bigg) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(T = T_n < \infty) = 0.\end{aligned}$$

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Siehe [JS03, Prop. I.2.26]. $\square$

3.4 Die previsible Projektion

Definition 3.4.1. *Für eine Zufallsvariable X und eine Sub-σ-Algebra $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ definieren wir die verallgemeinerte bedingte Erwartung durch*

$$\mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{G}] := \big(\mathbb{E}[X^+ \,|\, \mathscr{G}] - \mathbb{E}[X^- \,|\, \mathscr{G}]\big)\mathbb{1}_A + \infty \mathbb{1}_{A^c},$$

wobei $A := \{\mathbb{E}[|X| \,|\, \mathscr{G}] < \infty\}$.

Lemma 3.4.2. *Es sei $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[M_T \,|\, \mathscr{F}_{T-}] = M_{T-} \quad \textit{auf } \{T < \infty\}$$

für jede previsible Zeit T.

Beweis. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die stochastische Basis $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ vollständig ist. Es sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge für M. Weiterhin sei T eine previsible Zeit. Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach Lemma 1.3.10 gilt $\{T_n < T\} \in \mathscr{F}_{T-}$, und daher $\{T \leq T_n\} \in \mathscr{F}_{T-}$. Es folgt

$$\mathbb{E}[M_T \,|\, \mathscr{F}_{T-}] = \mathbb{E}[M_{T\wedge T_n} \,|\, \mathscr{F}_{T-}] = \mathbb{E}[(M^{T_n})_T \,|\, \mathscr{F}_{T-}] \quad \text{auf } \{T \leq T_n\}.$$

Außerdem gilt

$$M_{T-} = (M^{T_n})_{T-} \quad \text{auf } \{T \leq T_n\}.$$

Folglich dürfen wir annehmen, dass $M \in \mathscr{M}$. Da die stochastische Basis $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ vollständig ist, existiert nach Satz 3.2.17(c) eine monoton wachsende Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten, so dass $S_n \to T$ und $S_n < T$ auf $\{T > 0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wegen $S_n \leq T$ gilt nach dem Stoppsatz von Doob (Satz 2.3.23)

$$M_{S_n} = \mathbb{E}[M_T \,|\, \mathscr{F}_{S_n}].$$

Nach Satz 2.2.10 gilt

$$M_{S_n} \overset{\text{f.s.}}{\to} \mathbb{E}\bigg[M_T \,\bigg|\, \sigma\bigg(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_{S_n}\bigg)\bigg].$$

Wegen $S_n < T$ auf $\{T > 0\}$ gilt $\mathscr{F}_{S_n} \subset \mathscr{F}_{T-}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit

$$\sigma\bigg(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_{S_n}\bigg) \subset \mathscr{F}_{T-}.$$

Andererseits gilt für $t \in \mathbb{R}_+$ und $A \in \mathscr{F}_t$ wegen $\{t < T\} \subset \{T > 0\}$ mit Lemma 1.3.10, dass

$$A \cap \{t < T\} = A \cap \bigg(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{t \leq S_n\}\bigg) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{[A \cap \{t \leq S_n\}]}_{\in \mathscr{F}_{S_n}} \in \sigma\bigg(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_{S_n}\bigg),$$

so dass folgt $\mathscr{F}_{T-} \subset \sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_{S_n})$. Also gilt

$$\mathscr{F}_{T-} = \sigma\bigg(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_{S_n}\bigg),$$

und es folgt $M_{S_n} \overset{\text{f.s.}}{\to} \mathbb{E}[M_T \,|\, \mathscr{F}_{T-}]$. Also erhalten wir

$$\mathbb{E}[M_T \,|\, \mathscr{F}_{T-}] = \lim_{n\to\infty} M_{S_n} = M_{T-} \quad \text{auf } \{T < \infty\}.$$

□

Im Folgenden sei $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Satz 3.4.3. *Es sei X ein $\overline{\mathbb{R}}$-wertiger messbarer Prozess. Dann existiert ein bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig bestimmter Prozess ${}^pX$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) ${}^pX$ ist previsibel.

(b) $({}^pX)_T = \mathbb{E}[X_T \,|\, \mathscr{F}_{T-}]$ auf $\{T < \infty\}$ für jede previsible Zeit T.

Beweis. Eindeutigkeit: Es seien Y und Z zwei Prozesse, die (a) und (b) erfüllen. Für jede previsible Zeit T gilt fast sicher

$$Y_T = \mathbb{E}[X_T \,|\, \mathscr{F}_{T-}] = Z_T \quad \text{auf } \{T < \infty\}.$$

Also sind Y und Z nach Satz 3.2.19 ununterscheidbar.
Existenz: Nach dem Satz über monotone Klassen (Satz 1.4.4) genügt es, die Existenz für alle beschränkten, messbaren Prozesse der Form $X = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{[u,v)}$ mit $A \in \mathscr{F}$ und $u, v \in \mathbb{R}_+$ mit $u < v$ zu beweisen. Nach Satz 2.3.15 existiert ein $M \in \mathscr{M}$, so dass $M_t = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \,|\, \mathscr{F}_t]$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und $M_\infty = \mathbb{1}_A$. Wir setzen

$${}^pX := M_- \mathbb{1}_{[u,v)}.$$

Dann ist ${}^pX$ nach Satz 3.1.8 und Lemma 3.2.10(c) previsibel. Es sei T eine previsible Zeit. Nach Satz 3.1.6 ist $(\mathbb{1}_{[u,v)})_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} = \mathbb{1}_{\{u \le T < v\}} \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}$ bezüglich $\mathscr{F}_{T-}$ messbar. Mit Lemma 3.4.2, Satz 2.3.22 und wegen $\mathscr{F}_{T-} \subset \mathscr{F}_T$ folgt

$$\begin{aligned}({}^pX)_T &= M_{T-} \mathbb{1}_{\{u \le T < v\}} = \mathbb{E}[M_T \,|\, \mathscr{F}_{T-}] \mathbb{1}_{\{u \le T < v\}} \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \,|\, \mathscr{F}_T] \,|\, \mathscr{F}_{T-}] \mathbb{1}_{\{u \le T < v\}} = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \,|\, \mathscr{F}_{T-}] \mathbb{1}_{\{u \le T < v\}} \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{u \le T < v\}} \,|\, \mathscr{F}_{T-}] = \mathbb{E}[X_T \,|\, \mathscr{F}_{T-}] \quad \text{auf } \{T < \infty\}.\end{aligned}$$

□

Definition 3.4.4. *Wir nennen ${}^pX$ die previsible Projektion von X.*

Lemma 3.4.5. *Die Abbildung $X \mapsto {}^pX$ ist linear.*

Beweis. Übung. □

Lemma 3.4.6. *Es sei X ein $\overline{\mathbb{R}}$-wertiger messbarer Prozess.*

(a) Falls ${}^pX \in \mathbb{R}$ und Y ein $(-\infty, \infty]$-wertiger previsibler Prozess ist, dann gilt

$${}^p(XY) = Y\, {}^pX.$$

(b) Ist X previsibel, dann gilt ${}^pX = X$.

(c) Ist X optional, dann gilt für jede Stoppzeit T, dass

$$^p(X^T) = (^pX)\mathbb{1}_{[\![0,T]\!]} + X_T\mathbb{1}_{]\!]T,\infty[\![}.$$

(d) Ist $|X| \leq a$ für ein $a > 0$, dann gilt auch $|^pX| \leq a$ bis auf eine vernachlässigbare Menge.

Beweis. Übung. □

Satz 3.4.7.

(a) Für jedes $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ gilt $^pM = M_-$ und $^p(\Delta M) = 0$.

(b) Für jeden quasi-linksstetigen Prozess X gilt $^pX = X_-$ und $^p(\Delta X) = 0$.

Beweis. Übung. □

Definition 3.4.8. *Der previsible Träger einer Menge $A \in \mathscr{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ ist definiert durch die previsible Menge $A' := \{^p(\mathbb{1}_A) > 0\}$.*

Bemerkung 3.4.9. *Der previsible Träger ist bis auf eine vernachlässigbare Menge eindeutig bestimmt.*

Lemma 3.4.10. *Es seien X, Y zwei nichtnegative messbare Prozesse, so dass $\{X > 0\} = \{Y > 0\}$. Dann gilt $\{^pX > 0\} = \{^pY > 0\}$ bis auf eine vernachlässigbare Menge.*

Beweis. Es seien $A, B \in \mathscr{P}$ Versionen von $\{^pX > 0\}$ und $\{^pY > 0\}$. Es sei T eine previsible Zeit mit $[\![T]\!] \subset A \setminus B$. Wir nehmen an, dass $\mathbb{P}(T < \infty) > 0$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X_T \,|\, \mathscr{F}_{T-}] = (^pX)_T > 0 \quad \text{auf } \{T < \infty\},$$

und damit $\mathbb{E}[X_T\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}] > 0$. Es folgt

$$\mathbb{P}(\{X_T > 0\} \cap \{T < \infty\}) > 0.$$

Andererseits gilt

$$\mathbb{E}[Y_T \,|\, \mathscr{F}_{T-}] = (^pY)_T = 0 \quad \text{auf } \{T < \infty\},$$

und damit $\mathbb{E}[Y_T\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}] = 0$. Es folgt

$$\mathbb{P}(\{Y_T = 0\} \cap \{T < \infty\}) = 1.$$

Wegen $\{X_T > 0\} \cap \{Y_T = 0\} \cap \{T < \infty\} = \emptyset$ folgt der Widerspruch

$$0 = \mathbb{P}(\{X_T > 0\} \cap \{Y_T = 0\} \cap \{T < \infty\}) > 0.$$

Also gilt $\mathbb{P}(T = \infty) = 1$, und mit Satz 3.2.19(a) folgt, dass $A \setminus B$ vernachlässigbar ist. Analog zeigen wir, dass $B \setminus A$ vernachlässigbar ist. Insgesamt folgt $A = B$ bis auf eine vernachlässigbare Menge. □

Satz 3.4.11. *Es sei $A \in \mathscr{O}$ eine dünne Menge. Dann existieren eine Version $A' \in \mathscr{P}$ des previsiblen Trägers von A und eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von previsiblen Zeiten, so dass*

$$A' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![T_n]\!].$$

Insbesondere ist A' ebenfalls eine dünne Menge.

Beweis. Siehe [JS03, Prop. I.2.34]. □

Satz 3.4.12. *Für einen adaptierten càdlàg-Prozess X sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *X ist quasi-linksstetig.*

(ii) *$\{\Delta X \neq 0\}'$ ist vernachlässigbar.*

Beweis. Siehe [JS03, Prop. I.2.35]. □

Kapitel 4

Prozesse von lokal beschränkter Variation und das pfadweise Stieltjes-Integral

4.1 Funktionen von lokal beschränkter Variation

Definition 4.1.1. *Eine Funktion $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ heißt von lokal beschränkter Variation, falls für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ gilt*

$$\mathrm{Var}(a)_t := \sup_{\Pi \in \mathscr{Z}_t} \sum_{[s_i, s_{i+1}] \in \Pi} |a_{s_{i+1}} - a_{s_i}| < \infty,$$

wobei $\mathscr{Z}_t$ die Menge aller Zerlegungen $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = t$ des Intervalls $[0,t]$ bezeichnet.

Lemma 4.1.2. *Es sei $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine càdlàg-Funktion von lokal beschränkter Variation mit $a_0 = 0$.*

(a) $\mathrm{Var}(a) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *ist eine monoton wachsende càdlàg-Funktion mit* $\mathrm{Var}(a)_0 = 0$ *und* $|a| \leq \mathrm{Var}(a)$.

(b) Es gilt $\Delta \mathrm{Var}(a) = |\Delta a|$ *und* $\mathrm{Var}(a) = \mathrm{Var}(a)_- + |\Delta a|$.

(c) Es gilt $\mathrm{Var}(a) \leq \mathrm{Var}(a)_- + |a_-| + |a|$.

(d) Es existieren eindeutig bestimmte monoton wachsende Funktionen $b, c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $b_0 = c_0 = 0$, so dass $a = b - c$ und $\mathrm{Var}(a) = b + c$. *Diese sind gegeben durch*

$$b = \frac{a + \mathrm{Var}(a)}{2} \quad \textit{und} \quad c = b - a.$$

Beweis. Übung. □

Definition 4.1.3. *Eine càdlàg-Funktion $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ von lokal beschränkter Variation mit $a_0 = 0$ heißt* <u>*rein unstetig*</u>*, falls*

$$a = \sum_{s \le \bullet} \Delta a_s.$$

Bemerkung 4.1.4. *Es sei $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine càdlàg-Funktion von lokal beschränkter Variation mit $a_0 = 0$, die stetig und rein unstetig ist. Dann gilt $a = 0$.*

Satz 4.1.5. *Es sei $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine càdlàg-Funktion von lokal beschränkter Variation mit $a_0 = 0$.*

(a) Es existiert eine eindeutig bestimmte Zerlegung $a = a^c + a^d$, wobei a^c eine stetige Funktion von lokal beschränkter Variation mit $a_0^c = 0$ ist, und a^d eine rein unstetige càdlàg-Funktion von lokal beschränkter Variation mit $a_0^d = 0$ ist; diese Zerlegung ist gegeben durch

$$a^d = \sum_{s \le \bullet} \Delta a_s,$$
$$a^c = a - a^d.$$

(b) Ist a monoton wachsend, so sind auch a^c und a^d monoton wachsend.

Beweis. Übung. □

Bemerkung 4.1.6. *Es seien $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine càdlàg-Funktion von lokal beschränkter Variation mit $a_0 = 0$.*

(a) Die Funktion a ist die Verteilungsfunktion eines eindeutig bestimmten σ-endlichen signierten Maßes μ auf $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ mit den Eigenschaften $\mu(\{0\}) = 0$ und $\mu((s,t]) = a_t - a_s$ für alle $0 \le s \le t$.

(b) Falls a monoton wachsend ist, dann ist μ ein nichtnegatives Maß.

Definition 4.1.7. *Es sei $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine càdlàg-Funktion von lokal beschränkter Variation mit $a_0 = 0$, und es sei $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine Borel-messbare Funktion mit*

$$\int_0^t |h_s| d\mathrm{Var}(a)_s < \infty \quad \textit{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Dann definieren wir das <u>*Stieltjes-Integral*</u>

$$\int_0^t h_s da_s := \int_{(0,t]} h \, d\mu - \int_{(0,t]} h \, d\nu, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

wobei b und c die eindeutig bestimmten Funktionen aus Lemma 4.1.2(d) sind, und μ und ν die dazugehörigen Maße aus Bemerkung 4.1.6(b) bezeichnen.

Lemma 4.1.8. *Es sei $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine càdlàg-Funktion von lokal beschränkter Variation mit $a_0 = 0$, und es sei $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine Borel-messbare Funktion mit*

$$\int_0^t |h_s| d\mathrm{Var}(a)_s < \infty \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Wir definieren die Funktion $b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ durch

$$b_t := \int_0^t h_s da_s, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

(a) *Die Funktion b ist ebenfalls eine càdlàg-Funktion von lokal beschränkter Variation mit $b_0 = 0$, und es gilt $\Delta b = h\Delta a$.*

(b) *Ist a stetig, so ist auch b stetig.*

(c) *Ist a rein unstetig, so ist auch b rein unstetig und es gilt*

$$b = \sum_{s \leq \bullet} h_s \Delta a_s.$$

(d) *Falls a monoton wachsend und $h \geq 0$ ist, dann ist auch b monoton wachsend.*

Beweis. Übung. □

4.2 Prozesse von lokal beschränkter Variation

Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ eine stochastische Basis.

Definition 4.2.1.

(a) *Wir bezeichnen mit $\mathscr{V}$ die Menge aller adaptierten càdlàg-Prozesse A mit $A_0 = 0$, so dass jeder Pfad von lokal beschränkter Variation ist.*

(b) *Wie bezeichnen mit $\mathscr{V}^+$ die Menge aller $A \in \mathscr{V}$, so dass jeder Pfad monoton wachsend ist.*

Definition 4.2.2.

(a) *Für $A \in \mathscr{V}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Var}(A)$ den pfadweisen Variationsprozess.*

(b) *Für $A \in \mathscr{V}^+$ definieren wir die $\overline{\mathbb{R}}_+$-wertige Zufallsvariable $A_\infty := \lim_{t\to\infty} A_t$.*

Bemerkung 4.2.3.

(a) *Es gilt* $\mathscr{V}^+ \subset \mathscr{V}$.

(b) *Für jedes* $A \in \mathscr{V}^+$ *gilt* $\mathrm{Var}(A) = A$.

Lemma 4.2.4. *Es sei* $A \in \mathscr{V}$ *beliebig.*

(a) *Es gilt* $\mathrm{Var}(A) \in \mathscr{V}^+$.

(b) *Falls* A *previsibel ist, dann ist* $\mathrm{Var}(A)$ *ebenfalls previsibel.*

Beweis.

(a) Nach Lemma 4.1.2 ist $\mathrm{Var}(A)$ càdlàg mit monoton wachsenden Pfaden und $A_0 = 0$. Für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ ist

$$\mathrm{Var}(A)_t = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} |A_{tk/n} - A_{t(k-1)/n}|$$

messbar bezüglich $\mathscr{F}_t$. Also ist $\mathrm{Var}(A)$ adaptiert, und somit gilt $\mathrm{Var}(A) \in \mathscr{V}^+$.

(b) Nach Lemma 4.1.2 gilt $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(A)_- + |\Delta A|$. Also ist $\mathrm{Var}(A)$ nach Satz 3.1.8 ebenfalls previsibel.

□

Definition 4.2.5.

(a) *Wir setzen* $\mathscr{A} := \{A \in \mathscr{V} : \mathbb{E}[\mathrm{Var}(A)_\infty] < \infty\}$.

(b) *Wir setzen* $\mathscr{A}^+ := \{A \in \mathscr{V}^+ : \mathbb{E}[A_\infty] < \infty\}$.

Bemerkung 4.2.6. *Es sei* $A \in \mathscr{V}$.

(a) *Es gilt* $A \in \mathscr{A}$ *genau dann, wenn* $\mathrm{Var}(A) \in \mathscr{A}^+$.

(b) *Es gilt* $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ *genau dann, wenn* $\mathrm{Var}(A) \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$.

Satz 4.2.7. *Es sei* $A \in \mathscr{V}$.

(a) *Es existieren eindeutig bestimmte Prozesse* $B, C \in \mathscr{V}^+$, *so dass* $A = B - C$ *und* $\mathrm{Var}(A) = B + C$. *Diese sind gegeben durch*

$$B = \frac{A + \mathrm{Var}(A)}{2} \quad \textit{und} \quad C = B - A.$$

(b) *Falls* A *previsibel ist, dann sind* B, C *und* $\mathrm{Var}(A)$ *auch previsibel.*

(c) *Falls* $A \in \mathscr{A}$, *dann gilt* $\mathrm{Var}(A), B, C \in \mathscr{A}^+$.

(d) *Falls* $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$, *dann gilt* $\mathrm{Var}(A), B, C \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$.

Beweis. Folgt aus Lemmas 4.1.2, 4.2.4 und Bemerkung 4.2.6. □

Lemma 4.2.8.

(a) *Die Mengen* $\mathscr{V}^+$, $\mathscr{A}^+$ *und* $\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ *sind konvexe Kegel.*

(b) *Die Mengen* $\mathscr{V}$, $\mathscr{A}$ *und* $\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ *sind Vektorräume.*

(c) *Die Klassen* $\mathscr{V}$, $\mathscr{V}^+$, $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}^+$ *sind stabil unter Stoppen.*

(d) *Es gilt* $\mathscr{V}_{\mathrm{loc}} = \mathscr{V}$ *und* $\mathscr{V}^+_{\mathrm{loc}} = \mathscr{V}^+$.

(e) *Es gilt* $\mathscr{V} = \mathscr{V}^+ \ominus \mathscr{V}^+$.

(f) *Es gilt* $\mathscr{A} = \mathscr{A}^+ \ominus \mathscr{A}^+$ *und* $\mathscr{A}_{\mathrm{loc}} = \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}} \ominus \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$.

(g) *Es gilt* $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}_{\mathrm{loc}} \subset \mathscr{V}$ *und* $\mathscr{A}^+ \subset \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}} \subset \mathscr{V}^+$.

Beweis. Übung. □

Bemerkung 4.2.9. *Für eine Klasse* $\mathscr{C} \in \{\mathscr{V}, \mathscr{A}, \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}\}$ *bedeutet* $\mathscr{C} = \mathscr{C}^+ \ominus \mathscr{C}^+$, *dass zu jedem* $A \in \mathscr{C}$ *eine eindeutig bestimmte Zerlegung* $A = B - C$ *mit* $B, C \in \mathscr{C}^+$ *und* $\mathrm{Var}(A) = B + C$ *existiert.*

Satz 4.2.10. *Jedes* $A \in \mathscr{A}^+$ *ist ein Submartingal der Klasse (D).*

Beweis. Der Prozess A ist nach Lemma 2.3.5(a) ein Submartingal. Außerdem gilt für jede endliche Stoppzeit T, dass $A_T \le A_\infty$. Da $A_\infty \in \mathscr{L}^1$, folgt, dass A ein Prozess der Klasse (D) ist. □

Lemma 4.2.11. *Es sei* $A \in \mathscr{V}^+$ *ein previsibler Prozess. Dann ist für jedes* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *die Abbildung*

$$T := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : A_t \ge a\}$$

eine previsible Zeit.

Beweis. Es genügt, die Situation $a \in \mathbb{R}_+$ anzuschauen. Nach Satz 1.3.14 ist T eine Stoppzeit. Wir setzen

$$B := \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : A_t(\omega) \ge a\} \in \mathscr{P}.$$

Wegen der Monotonie und der Rechtsstetigkeit von A gilt $[\![T]\!] \subset B$. Also ist T nach Lemma 3.2.14 eine previsible Zeit. □

Satz 4.2.12. *Für jeden previsiblen Prozess $A \in \mathscr{V}$ sind A und* $\mathrm{Var}(A)$ *lokal beschränkt. Es gilt also insbesondere $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$.*

Beweis. Siehe [JS03, Lemma I.3.10]. □

Satz 4.2.13. *Es gilt $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{V} \subset \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$.*

Beweis. Durch Lokalisierung genügt es, zu zeigen, dass $\mathscr{M} \cap \mathscr{V} \subset \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$. Dazu sei $A \in \mathscr{M} \cap \mathscr{V}$ beliebig. Die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$T_n := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : \mathrm{Var}(A) > n\}$$

ist nach Lemma 1.6.8 eine lokalisierende Folge von Stoppzeiten. Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach dem Stoppsatz von Doob (Satz 2.3.23) gilt $A_{T_n} \in \mathscr{L}^1$, und nach Lemma 4.1.2(c) gilt

$$\mathrm{Var}(A)_{T_n} \leq \mathrm{Var}(A)_{T_n-} + |A_{T_n-}| + |A_{T_n}| \leq 2n + |A_{T_n}| \in \mathscr{L}^1.$$

Insgesamt folgt $\mathrm{Var}(A) \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^+$, und damit $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$. □

Satz 4.2.14. *Es sei $A \in \mathscr{V}$.*

(a) *Es existiert eine eindeutig bestimmte Zerlegung $A = A^c + A^d$ mit $A^c, A^d \in \mathscr{V}$, wobei A^c stetig ist, und A^d rein unstetig; diese Zerlegung ist gegeben durch*

$$A^d := \sum_{s\leq\bullet} \Delta A_s,$$
$$A^c := A - A^d.$$

(b) *Ist $A \in \mathscr{V}^+$, so gilt auch $A^c, A^d \in \mathscr{V}^+$.*

(c) *Ist A previsibel, so ist auch A^d previsibel.*

Beweis.

(a) Nach Korollar 1.4.14 existiert eine ausschöpfende Folge von Stoppzeiten $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass

$$\{\Delta A \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![T_n]\!].$$

Also erhalten wir die Darstellung

$$A^d = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Delta A_{T_n} \mathbb{1}_{[\![T_n,\infty[\![}.$$

Nach Korollar 1.4.9 ist ΔA optional, und nach Satz 1.4.5 ist ΔA_{T_n} für jedes $n \in \mathbb{N}$ bezüglich $\mathscr{F}_{T_n}$ messbar. Folglich ist A^d nach Lemma 1.4.7 adaptiert, und damit ist auch A^c adaptiert. Also folgt Teil (a) aus Satz 4.1.5.

(b) Folgt aus Satz 4.1.5.

(c) Nach Lemma 3.2.12 existiert eine ausschöpfende Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von previsiblen Zeiten, so dass

$$\{\Delta A \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![T_n]\!].$$

Also erhalten wir die Darstellung

$$A^d = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Delta A_{T_n} \mathbb{1}_{[\![T_n,\infty[\![}.$$

Nach Satz 3.1.8 ist ΔA previsibel, und nach Satz 3.1.6 ist ΔA_{T_n} für jedes $n \in \mathbb{N}$ bezüglich $\mathscr{F}_{T_n-}$ messbar. Folglich ist A^d nach Lemma 3.2.10(c) previsibel.

□

Satz 4.2.15. *Es sei $A \in \mathscr{V}$ rein unstetig.*

(a) Es existiert eine bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig bestimmte Zerlegung $A = A^q + A^a$ mit rein unstetigen $A^q, A^a \in \mathscr{V}$, so dass A^q quasi-linksstetig ist, und $\Delta A^a_T = 0$ fast sicher auf $\{T < \infty\}$ für jede orthogonale Stoppzeit T.

(b) Ist A quasi-linksstetig, so gilt $A^q = A$ und $A^a = 0$.

(c) Ist A previsibel, so gilt $A^q = 0$ und $A^a = A$.

(d) Ist $A \in \mathscr{V}^+$, so gilt auch $A^q, A^a \in \mathscr{V}^+$.

Beweis.

(a) Existenz: Nach Satz 3.3.14 existiert eine ausschöpfende Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten, so dass

$$\{\Delta A \neq 0\} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![T_n]\!],$$

und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist T_n entweder orthogonal oder previsibel. Wir setzen

$$I := \{n \in \mathbb{N} : T_n \text{ ist orthogonal}\},$$
$$J := \{n \in \mathbb{N} : T_n \text{ ist previsibel}\},$$

und

$$A^q := \sum_{n\in I} \Delta A_{T_n} \mathbb{1}_{[\![T_n,\infty[\![},$$
$$A^a := \sum_{n\in J} \Delta A_{T_n} \mathbb{1}_{[\![T_n,\infty[\![}.$$

Dann gilt $A = A^q + A^a$, und A^q und A^a sind rein unstetig mit $A^q, A^a \in \mathscr{V}$. Weiterhin gilt (beachte auch Satz 3.3.13)

$$\{\Delta A^q \neq 0\} = \bigcup_{n \in I} [\![T_n]\!],$$
$$\{\Delta A^a \neq 0\} \subset \bigcup_{n \in J} [\![T_n]\!].$$

Nach Satz 3.3.20 ist A^q quasi-linksstetig, und nach Satz 3.3.15 gilt $\Delta A^a_T = 0$ fast sicher auf $\{T < \infty\}$ für jede orthogonale Stoppzeit T.

Eindeutigkeit: Siehe [HWY92, Thm. 4.25].

(b) Folgt aus der Eindeutigkeit der Zerlegung $A = A^q + A^a$.

(c) Folgt aus Korollar 3.3.16 und der Eindeutigkeit der Zerlegung $A = A^q + A^a$.

(d) Folgt aus der Konstruktion aus Teil (a).

□

4.3 Übergangskerne

Definition 4.3.1. *Es seien $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ und $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ messbare Räume. Eine Abbildung $K : \Omega_1 \times \mathscr{F}_2 \to [0, \infty]$ heißt ein σ-endlicher Übergangskern (von $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$), falls gilt:*

(a) $\omega_1 \mapsto K(\omega_1, A_2)$ ist $\mathscr{F}_1$-messbar für jedes $A_2 \in \mathscr{F}_2$.

(b) $A_2 \mapsto K(\omega_1, A_2)$ ist ein σ-endliches Maß auf $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ für jedes $\omega_1 \in \Omega_1$.

Satz 4.3.2. *Es seien $(\Omega_1, \mathscr{F}_1, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ ein messbarer Raum und K ein σ-endlicher Übergangskern von $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes σ-endliches Maß $\mu \otimes K$ auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2)$, so dass*

$$(\mu \otimes K)(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} K(\omega_1, A_2)\mu(d\omega_1) \quad \text{für alle } A_1 \in \mathscr{F}_1 \text{ und } A_2 \in \mathscr{F}_2.$$

Satz 4.3.3 (Satz von Fubini für Übergangskerne)**.** *Es seien $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ und $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ messbare Räume, es sei μ ein σ-endliches Maß auf $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$, und es sei K ein σ-endlicher Übergangskern von $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$. Weiterhin sei $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ eine $\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$-messbare Funktion, so dass $f \geq 0$ oder $f \in \mathscr{L}^1(\mu \otimes K)$. Dann ist*

$$\Omega_1 \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) K(\omega_1, d\omega_2)$$

eine $\mathscr{F}_1$-messbare Funktion, und es gilt

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f\,d(\mu\otimes K) = \int_{\Omega_1}\Big(\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)K(\omega_1,d\omega_2)\Big)\mu(d\omega_1).$$

4.4 Das pfadweise Stieltjes-Integral

Es sei $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$ eine stochastische Basis.

Bemerkung 4.4.1. *Es sei H ein optionaler Prozess. Nach Satz 1.4.5 ist für jedes $\omega\in\Omega$ die Abbildung $\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $t\mapsto H_t(\omega)$ eine Borel-messbare Abbildung.*

Definition 4.4.2. *Es seien $A\in\mathscr{V}$ und H ein optionaler Prozess, so dass*

$$\int_0^t |H_s| d\mathrm{Var}(A)_s < \infty \quad \textit{für alle } t\in\mathbb{R}_+.$$

Wir definieren das Stieltjes-Integral $H\cdot A = \int_0^\bullet H_s dA_s$ gemäß Definition 4.1.7 durch

$$(H\cdot A)_t(\omega) := \int_0^t H_s(\omega)dA_s(\omega), \quad (\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+.$$

Definition 4.4.3. *Ein Mengensystem $\mathscr{C}\subset\mathfrak{P}(E)$ über einem Grundraum E heißt eine monotone Klasse über E, falls gilt:*

(M1) Für jede aufsteigende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathscr{C}$ von Ereignissen ist

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{C}.$$

(M2) Für alle $A,B\in\mathscr{C}$ mit $A\subset B$ ist $B\setminus A\in\mathscr{C}$.

Definition 4.4.4. *Es sei $\mathscr{C}\subset\mathfrak{P}(E)$ ein Mengensystem über einem Grundraum E. Dann heißt*

$$\mathscr{M}(\mathscr{C}) := \bigcap_{\substack{\mathscr{B}\supset\mathscr{C}\\ \mathscr{B}\text{ ist monotone Klasse}}} \mathscr{B}$$

die von $\mathscr{C}$ erzeugte monotone Klasse.

Satz 4.4.5 (Satz über monotone Klassen)**.** *Es sei $\mathscr{E}\subset\mathfrak{P}(E)$ ein $\cap$-stabiles Mengensystem über einem Grundraum E mit $E\in\mathscr{E}$. Dann gilt $\mathscr{M}(\mathscr{E})=\sigma(\mathscr{E})$.*

Lemma 4.4.6. *Es sei $A \in \mathscr{V}^+$ beliebig. Dann existiert zu jedem $t \in \mathbb{R}_+$ ein eindeutig bestimmter Übergangskern $K_t : \Omega \times \mathcal{B}([0,t]) \to \mathbb{R}_+$ von $(\Omega, \mathscr{F}_t)$ nach $([0,t], \mathcal{B}([0,t]))$, so dass für jedes $\omega \in \Omega$ der Pfad $s \mapsto A_s(\omega)$ die Verteilungsfunktion von $B \mapsto K_t(\omega, B)$ ist.*

Beweis. Folgt mit dem Satz über monotone Klassen (Satz 4.4.5); Details: Übung. □

Satz 4.4.7. *Es seien $A \in \mathscr{V}$ und H ein optionaler Prozess, so dass*

$$\int_0^t |H_s| d\mathrm{Var}(A)_s < \infty \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Wir setzen $B := H \cdot A$.

(a) Es gilt $B \in \mathscr{V}$ und $\Delta B = H \Delta A$.

(b) Ist A stetig, so ist auch B stetig.

(c) Ist A rein unstetig, so ist auch B rein unstetig und es gilt

$$B = \sum_{s \le \bullet} H_s \Delta A_s.$$

(d) Falls $A \in \mathscr{V}^+$ und H nichtnegativ ist, dann gilt $B \in \mathscr{V}^+$.

(e) Falls A und H previsibel sind, dann ist auch B previsibel, und es gilt $B \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$.

Beweis. Wegen Satz 4.2.7 dürfen wir annehmen, dass $A \in \mathscr{V}^+$.

(a) Nach Lemma 4.1.8(a) ist B ein càdlag-Prozess mit $\Delta B = H \Delta A$, Pfaden von lokal beschränkter Variation und $B_0 = 0$. Es sei $t \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Weiterhin sei K_t der Übergangskern von $(\Omega, \mathscr{F}_t)$ nach $([0,t], \mathcal{B}([0,t]))$ aus Lemma 4.4.6. Dann gilt

$$B_t(\omega) = \int_0^t H_s(\omega) K_t(\omega, ds), \quad (\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+.$$

Nach dem Satz von Fubini für Übergangskerne (Satz 4.3.3) ist B_t bezüglich $\mathscr{F}_t$ messbar, und folglich ist B adaptiert.

(b) Folgt aus Lemma 4.1.8(b).

(c) Folgt aus Lemma 4.1.8(c).

(d) Folgt aus Lemma 4.1.8(d).

(e) Nach Satz 3.1.8 ist $\Delta B = H\Delta A$ previsibel, und somit ist auch $B = B_- + \Delta B$ previsibel. Nach Satz 4.2.12 folgt $B \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$.

□

Bemerkung 4.4.8. *Die Integrierbarkeitsbedingung aus Definition 4.4.2 können wir nun alternativ schreiben als*

$$|H| \cdot \mathrm{Var}(A) \in \mathscr{V}^+.$$

Lemma 4.4.9. *Es seien $A \in \mathscr{A}$ und $M \in \mathscr{M}$ ein beschränktes Martingal. Weiterhin sei T eine Stoppzeit.*

(a) Es gilt $\mathbb{E}[M_T A_T] = \mathbb{E}[M \cdot A_T]$.

(b) Falls A previsibel ist, dann gilt $\mathbb{E}[M_T A_T] = \mathbb{E}[M_- \cdot A_T]$.

Beweis. Siehe [JS03, Lemma I.3.12]. □

Satz 4.4.10. *Es seien $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ und $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ ein lokales Martingal, das lokal beschränkt ist. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) Es gilt $MA - M \cdot A \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$.

(b) Falls A previsibel ist, dann gilt auch $MA - M_- \cdot A \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$.

Beweis. Durch Lokalisierung dürfen wir annehmen, dass $A \in \mathscr{A}$ und $M \in \mathscr{M}$, und dass M beschränkt ist.

(a) Für jede Stoppzeit T gilt nach Lemma 4.4.9(a) wegen $A_0 = 0$

$$\mathbb{E}[(MA - M \cdot A)_T] = 0 = \mathbb{E}[(MA - M \cdot A)_0],$$

und nach dem Stoppsatz von Doob (Satz 2.3.23) folgt $MA - M \cdot A \in \mathscr{M}$.

(b) Verläuft analog mit Lemma 4.4.9(b).

□

4.5 Der previsible Kompensator

Satz 4.5.1 (Doob-Meyer-Zerlegung)**.** *Es sei X ein Submartingal der Klasse (D). Dann existiert ein bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig bestimmter previsibler Prozess $A \in \mathscr{A}^+$, so dass $X - A \in \mathscr{M}$.*

Beweis. Siehe, zum Beispiel, [KS91, Theorem I.4.10]. □

Bemerkung 4.5.2. *Mit $M := X - A$ gilt die Zerlegung $X = M + A$.*

Korollar 4.5.3. *Für jedes previsible lokale Martingal $M \in \mathscr{M}_{\text{loc}} \cap \mathscr{V}$ gilt $M = 0$ bis auf Ununterscheidbarkeit.*

Beweis. Durch Lokalisierung und Anwendung von Satz 4.2.13 genügt es, das Resultat für jedes previsible Martingal $M \in \mathscr{M} \cap \mathscr{A}$ zu beweisen. Wegen $M \in \mathscr{A}$ folgt aus Satz 4.2.7, dass previsible Prozesse $X, A \in \mathscr{A}^+$ mit $M = X - A$ existieren. Nach Satz 4.2.10 ist X ein Submartingal der Klasse (D). Außerdem gilt

$$X - A \in \mathscr{M} \quad \text{und} \quad X - X \in \mathscr{M}.$$

Aus der Eindeutigkeitsaussage von Satz 4.5.1 folgt, dass $X = A$ bis auf Ununterscheidbarkeit, und damit $M = 0$ bis auf Ununterscheidbarkeit. □

Korollar 4.5.4. *Für jedes stetige lokale Martingal $M \in \mathscr{M}_{\text{loc}} \cap \mathscr{V}$ gilt $M = 0$ bis auf Ununterscheidbarkeit.*

Beweis. Folgt aus Korollar 4.5.3. □

Satz 4.5.5. *Es sei $A \in \mathscr{A}_{\text{loc}}$.*

(a) Es existiert ein bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig bestimmter previsibler Prozess $A^p \in \mathscr{A}_{\text{loc}}$, so dass $A - A^p \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$.

(b) Für $A \in \mathscr{A}$ gilt $A^p \in \mathscr{A}$ und $A - A^p \in \mathscr{M}$.

(c) Für $A \in \mathscr{A}^+_{\text{loc}}$ gilt $A^p \in \mathscr{A}^+_{\text{loc}}$.

(d) Für $A \in \mathscr{A}^+$ gilt $A^p \in \mathscr{A}^+$ und $A - A^p \in \mathscr{M}$.

Beweis. Wir unterteilen den Beweis in vier Schritte:

(i) Zunächst beweisen wir die Existenz für $A \in \mathscr{A}^+$. Nach Satz 4.2.10 ist A ein Submartingal der Klasse (D). Also existiert nach Satz 4.5.1 ein (bis auf Ununterscheidbarkeit) eindeutig bestimmter Prozess $A^p \in \mathscr{A}^+$, so dass $A - A^p \in \mathscr{M}$.

(ii) Nun beweisen wir die Existenz für $A \in \mathscr{A}^+_{\text{loc}}$. Es sei $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge, so dass $A^{T_n} \in \mathscr{A}^+$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach Teil (i) existiert ein (bis auf Ununterscheidbarkeit) eindeutig bestimmter Prozess $B(n) \in \mathscr{A}^+$, so dass $A^{T_n} - B(n) \in \mathscr{M}$. Nun zeigen wir, dass (bis auf Ununterscheidbarkeit)

$$B(n+1)^{T_n} = B(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

In der Tat, es gilt

$$A^{T_n} - B(n) \in \mathscr{M},$$

und da $\mathscr{M}$ nach Korollar 2.3.25 stabil unter Stoppen ist, gilt

$$A^{T_n} - B(n+1)^{T_n} = \big(A^{T_{n+1}} - B(n+1)\big)^{T_n} \in \mathscr{M}.$$

Wir setzen $T_0 := 0$. Der Prozess

$$A^p := \sum_{n \in \mathbb{N}} B(n) \mathbb{1}_{]\!]T_{n-1},T_n]\!]}$$

ist nach Satz 3.1.7 previsibel. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(A^p)^{T_n} = B(n) \in \mathscr{A}^+ \quad \text{und} \quad (A - A^p)^{T_n} = A^{T_n} - B(n) \in \mathscr{M}.$$

Daraus folgt $A^p \in \mathscr{A}_{\text{loc}}^+$ und $A - A^p \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$.

(iii) Nun beweisen wir die Existenz für $A \in \mathscr{A}_{\text{loc}}$. Nach Satz 4.2.7 existieren $B, C \in \mathscr{A}_{\text{loc}}^+$, so dass $A = B - C$. Der Prozess $A^p := B^p - C^p$ gemäß Teil (ii) ist previsibel, es gilt $A^p \in \mathscr{A}_{\text{loc}}$, und

$$A - A^p = (B - C) - (B^p - C^p) = (B - B^p) - (C - C^p) \in \mathscr{M}_{\text{loc}}.$$

(iv) Abschließend beweisen wir die Eindeutigkeit. Für $A \in \mathscr{A}_{\text{loc}}$ seien $B, C \in \mathscr{A}_{\text{loc}}$ zwei previsible Prozesse, so dass $A - B \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$ und $A - C \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$. Dann ist auch

$$B - C = (A - C) - (A - B) \in \mathscr{M}_{\text{loc}} \cap \mathscr{V}$$

ein previsibles lokales Martingal, und nach Korollar 4.5.3 folgt, dass $B = C$ bis auf Ununterscheidbarkeit.

□

Definition 4.5.6. *Für $A \in \mathscr{A}_{\text{loc}}$ nennen wir A^p den previsiblen Kompensator von A.*

Lemma 4.5.7. *Die Abbildung $A \mapsto A^p : \mathscr{A}_{\text{loc}} \to \mathscr{A}_{\text{loc}}$ ist linear.*

Beweis. Übung. □

Lemma 4.5.8. *Es sei $A \in \mathscr{A}_{\text{loc}}$.*

(a) A ist genau dann previsibel, wenn $A^p = A$.

(b) Für eine Stoppzeit T gilt $(A^T)^p = (A^p)^T$.

(c) Es gilt ${}^pA = A_- + \Delta(A^p)$.

(d) Es gilt ${}^p(\Delta A) = \Delta(A^p)$.

(e) Es gilt $A \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ genau dann, wenn $A^p = 0$.

Beweis. Übung. □

Satz 4.5.9. *Es sei $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$.*

(a) Ist A quasi-linksstetig, dann ist A^p stetig.

(b) Falls $A \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$, dann ist A^p genau dann stetig, wenn A quasi-linksstetig ist.

Beweis.

(a) Nach Satz 3.4.7(b) gilt ${}^p(\Delta A) = 0$. Also folgt mit Lemma 4.5.8(d), dass $\Delta(A^p) = 0$.

(b) Es gilt mit Lemmas 3.4.10 und 4.5.8(d) bis auf eine vernachlässigbare Menge

$$\{\Delta A \neq 0\}' = \{{}^p(\mathbb{1}_{\{\Delta A \neq 0\}}) > 0\} = \{{}^p(\Delta A) > 0\} = \{\Delta(A^p) > 0\}.$$

Also folgt dieser Teil mit Satz 3.4.12.

□

Satz 4.5.10. *Es seien $A, B \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ mit einem previsiblen Prozess B. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt $B = A^p$.

(ii) Für jede Stoppzeit T gilt $\mathbb{E}[A_T] = \mathbb{E}[B_T]$.

(iii) Für jeden nichtnegativen, previsiblen Prozess H gilt $\mathbb{E}[(H \cdot A)_\infty] = \mathbb{E}[(H \cdot B)_\infty]$.

Beweis. (i) ⇒ (ii): Es sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge, so dass $A^{T_n} \in \mathscr{A}^+$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 4.5.8(b) und Satz 4.5.5(d) gilt

$$B^{T_n} = (A^p)^{T_n} = (A^{T_n})^p \in \mathscr{A}^+$$

und $A^{T_n} - B^{T_n} \in \mathscr{M}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es sei T eine beliebige Stoppzeit. Nach dem Stoppsatz von Doob (Satz 2.3.23) folgt

$$\mathbb{E}[A_{T\wedge T_n} - B_{T\wedge T_n}] = \mathbb{E}[(A^{T_n} - B^{T_n})_T] = 0 \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N},$$

und mit dem Satz von der monotonen Konvergenz erhalten wir

$$\mathbb{E}[A_T] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[A_{T\wedge T_n}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[B_{T\wedge T_n}] = \mathbb{E}[B_T].$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge, so dass $A^{T_n}, B^{T_n} \in \mathscr{A}^+$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Weiterhin sei T eine beliebige Stoppzeit. Dann gilt

$$\mathbb{E}[(A^{T_n} - B^{T_n})_T] = \mathbb{E}[A_{T\wedge T_n} - B_{T\wedge T_n}] = 0.$$

Nach dem Stoppsatz von Doob (Satz 2.3.23) folgt, dass $A^{T_n} - B^{T_n} \in \mathscr{M}$, und mit Lemma 4.5.8(b) folgt

$$(A^p)^{T_n} = (A^{T_n})^p = B^{T_n}.$$

Insgesamt folgt $B = A^p$.
(iii) $\Rightarrow$ (ii): Wir wählen $H = \mathbb{1}_{[\![0,T]\!]}$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Nach dem Satz über monotone Klassen (Satz 1.4.4) genügt es, die Identität für alle Prozesse der Form $H = \mathbb{1}_{[\![0,T]\!]}$ mit einer Stoppzeit T zu beweisen. □

Satz 4.5.11. *Es seien $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ und H ein previsibler Prozess mit $H \cdot A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$. Dann gilt $H \cdot A^p \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ und $H \cdot A^p = (H \cdot A)^p$.*

Beweis. Nach Satz 4.2.7 existieren $B, C \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$, so dass $A = B - C$. Nach Satz 4.5.10 gilt für jeden nichtnegativen, previsiblen Prozess K

$$\mathbb{E}[(K \cdot (H^+ \cdot B))_\infty] = \mathbb{E}[((KH^+) \cdot B)_\infty] = \mathbb{E}[((KH^+) \cdot B^p)_\infty] = \mathbb{E}[(K \cdot (H^+ \cdot B^p))_\infty].$$

Da $H^+ \cdot B^p$ nach Satz 4.4.7 previsibel ist, folgt nach Satz 4.5.10, dass

$$H^+ \cdot B^p = (H^+ \cdot B)^p.$$

Nach analogen Rechnungen schließen wir aus

$$\begin{aligned} H \cdot A &= H^+ \cdot B + H^- \cdot C - H^- \cdot B - H^+ \cdot C, \\ H \cdot A^p &= H^+ \cdot B^p + H^- \cdot C^p - H^- \cdot B^p - H^+ \cdot C^p, \end{aligned}$$

dass $H \cdot A^p = (H \cdot A)^p$. □

Satz 4.5.12. *Es seien $A \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{V}$ und H ein previsibler Prozess mit $H \cdot A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$. Dann gilt $H \cdot A \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$.*

Beweis. Nach Lemma 4.5.8(e) gilt $A^p = 0$. Also folgt mit Satz 4.5.11

$$(H \cdot A)^p = H \cdot A^p = 0,$$

und mit Lemma 4.5.8(e) folgt $H \cdot A \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$. □

Für die folgenden Resultate beachten wir die in Abschnitt 1.5 eingeführten Begriffe.

Lemma 4.5.13. *Jeder Punktprozess N ist lokal beschränkt. Insbesondere ist N ein rein unstetiger Prozess aus $\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}^{+}$.*

Beweis. Die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$T_n := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : N_t \geq n\}$$

ist eine lokalisierende Folge mit $|N^{T_n}| \leq n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. □

Satz 4.5.14. *Es sei N ein verallgemeinerter Poisson-Prozess mit Intensität a.*

(a) Der previsible Kompensator ist gegeben durch $N^p = a$.

(b) Für jede previsible Zeit T gilt

$$\mathbb{P}(\Delta N_T \neq 0) = \mathbb{E}[\Delta a_T] \quad \textit{auf } \{T < \infty\}.$$

Insbesondere ist die Menge der festen Sprungzeiten gegeben durch

$$J = \{\Delta a > 0\}.$$

Beweis. Übung. □

Bemerkung 4.5.15. *Es sei N ein Poisson-Prozess. Nach Satz 3.4.7(b) gilt ${}^{p}N = N_-$, und nach Satz 4.5.14(a) gilt $N^p = a$. Also haben wir ein Beispiel mit ${}^{p}N \neq N^p$.*

Korollar 4.5.16. *Es sei N ein verallgemeinerter Poisson-Prozess. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) N ist ein Poisson-Prozess.

(ii) N ist quasi-linksstetig.

Beweis. Folgt aus Satz 4.5.14(b), oder alternativ aus den Sätzen 4.5.14(a) und 4.5.9(b). □

Satz 4.5.17. *Es sei N ein verallgemeinerter Poisson-Prozess mit Intensität a.*

(a) Die Zerlegung $N = N^q + N^a$ gemäß Satz 4.2.15 ist gegeben durch

$$\begin{aligned} N^a &= \sum_{s \leq \bullet} \mathbb{1}_J(s) \Delta N_s, \\ N^q &= N - N^a. \end{aligned}$$

(b) *N^q ist ein Poisson-Prozess mit Intensität a^c, und N^a ist ein verallgemeinerter Poisson-Prozess mit Intensität a^d, wobei $a = a^c + a^d$ die Zerlegung gemäß Satz 4.1.5 ist.*

Beweis. Per Definition sind N^a und N^q Punktprozesse mit $\mathbb{E}[N_t^a] < \infty$ und $\mathbb{E}[N_t^q] < \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Es seien $s < t$ beliebig. Dann ist

$$N_t^a - N_s^a = \sum_{u \in (s,t]} \mathbb{1}_J(u) \Delta N_u = \sum_{u \in (s,t]} \mathbb{1}_J(u) \lim_{n \to \infty} (N_u - N_{u-1/n})$$

unabhängig von $\mathscr{F}_s$. Ebenso ist

$$N_t^q - N_s^q = \sum_{u \in (s,t]} \mathbb{1}_{J^c}(u) \Delta N_u = \sum_{u \in (s,t]} \mathbb{1}_{J^c}(u) \lim_{n \to \infty} (N_u - N_{u-1/n})$$

unabhängig von $\mathscr{F}_s$. Folglich sind N^a und N^q verallgemeinerte Poisson-Prozesse. Nun berechnen wir die Intensitäten. Es gilt nach dem Satz von der monotonen Konvergenz und Satz 4.5.14(b), da $J = \{\Delta a > 0\}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_t^a] &= \mathbb{E}\left[\sum_{s \le t} \mathbb{1}_J(s) \Delta N_s\right] = \sum_{s \le t} \mathbb{1}_J(s) \mathbb{E}[\Delta N_s] = \sum_{s \le t} \mathbb{1}_J(s) \mathbb{P}(\Delta N_s \neq 0) \\
&= \sum_{s \le t} \mathbb{1}_J(s) \Delta a_s = \sum_{s \le t} \Delta a_s = a_t^d,
\end{aligned}$$

und daher

$$\mathbb{E}[N_t^q] = \mathbb{E}[N_t] - \mathbb{E}[N_t^a] = a_t - a_t^d = a_t^c.$$

Nach Korollar 4.5.16 ist N^q quasi-linksstetig. Wegen $\{\Delta N^a \neq 0\} \subset \bigcup_{t \in J} [\![t]\!]$ folgt mit Satz 3.3.15, dass $\Delta N_T^a = 0$ fast sicher auf $\{T < \infty\}$ für jede orthogonale Stoppzeit T. $\square$

Nach Satz 3.3.13 existiert eine ausschöpfende Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Stoppzeiten, so dass

$$\{\Delta N \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\![T_n]\!],$$

und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist T_n entweder orthogonal oder erreichbar. Wie Satz 4.5.17 zeigt, sieht diese Einteilung wie folgt aus:

- Die orthogonalen T_n sind nach Satz 3.3.20 durch $\{\Delta N^q \neq 0\}$ gegeben.
- Die erreichbaren T_n sind durch $\{\Delta N^a \neq 0\} = \bigcup_{t \in J} [\![t_{\{\Delta N_t \neq 0\}}]\!]$ gegeben. Die $t_{\{\Delta N_t \neq 0\}}$ sind erreichbare Stoppzeiten, da $[\![t_{\{\Delta N_t \neq 0\}}]\!] \subset [\![t]\!]$.

Kapitel 5

Lokale Martingale

Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ eine stochastische Basis.

5.1 Die previsible quadratische Variation

Lemma 5.1.1. *Für jedes $M \in \mathscr{H}^2$ ist M^2 ein Submartingal der Klasse (D).*

Beweis. Nach Lemma 2.3.5 ist M^2 ein Submartingal. Nach der Doob'schen L^2-Ungleichung (Korollar 2.3.30) gilt $M^* \in \mathscr{L}^2$, und folglich gilt

$$M_T^2 \leq (M^*)^2 \in \mathscr{L}^1 \quad \text{für jede Stoppzeit } T.$$

Also ist M^2 ein Prozess der Klasse (D). □

Satz 5.1.2. *Es seien $M \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$ beliebig.*

(a) Es existiert ein bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig bestimmter previsibler Prozess $\langle M, M \rangle \in \mathscr{V}^+$ (und damit $\langle M, M \rangle \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$), so dass $M^2 - \langle M, M \rangle \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$.

(b) Für $M \in \mathscr{H}^2$ gilt $\langle M, M \rangle \in \mathscr{A}^+$ und $M^2 - \langle M, M \rangle \in \mathscr{M}$.

Beweis. Durch Lokalisierung dürfen wir annehmen, dass $M \in \mathscr{H}^2$. Nach Lemma 5.1.1 ist M^2 ein Submartingal der Klasse (D). Nach der Doob-Meyer-Zerlegung (Satz 4.5.1) existiert ein bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig bestimmter previsibler Prozess $\langle M, M \rangle \in \mathscr{A}^+$, so dass $M^2 - \langle M, M \rangle \in \mathscr{M}$. □

Definition 5.1.3. *Für $M \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$ nennen wir $\langle M, M \rangle$ die previsible quadratische Variation von M.*

Lemma 5.1.4. *Für jedes $M \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$ gilt ${}^p[(\Delta M)^2] = \Delta \langle M, M \rangle$.*

Beweis. Übung. ☐

Korollar 5.1.5. *Für jedes $M \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\langle M, M\rangle$ *ist stetig.*

(ii) M *ist quasi-linksstetig.*

Beweis. Es gilt mit Lemmas 3.4.10 und 5.1.4 bis auf eine vernachlässigbare Menge

$$\{\Delta M \neq 0\}' = \{{}^p(\mathbb{1}_{\{\Delta M \neq 0\}}) > 0\} = \{{}^p[(\Delta M)^2] > 0\} = \{\Delta\langle M, M\rangle > 0\}.$$

Also folgt (i) $\Leftrightarrow$ (ii) mit Satz 3.4.12. ☐

Bemerkung 5.1.6. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$xy = \frac{1}{4}\big((x+y)^2 - (x-y)^2\big).$$

Satz 5.1.7. *Es seien $M, N \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$ beliebig.*

(a) Es existiert ein bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig bestimmter previsibler Prozess $\langle M, N\rangle \in \mathscr{V}$ (und damit $\langle M, N\rangle \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$), so dass $MN - \langle M, N\rangle \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$.

(b) Dieser ist gegeben durch die Polarisierungsformel

$$\langle M, N\rangle = \frac{1}{4}\big(\langle M+N, M+N\rangle - \langle M-N, M-N\rangle\big).$$

(c) Sind $M, N \in \mathscr{H}^2$, dann gilt $\langle M, N\rangle \in \mathscr{A}$ und $MN - \langle M, N\rangle \in \mathscr{M}$.

Beweis. Übung. ☐

Definition 5.1.8. *Für $M, N \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$ nennen wir $\langle M, N\rangle$ die previsible quadratische Kovariation von M und N.*

Lemma 5.1.9. *Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot\rangle : \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}} \times \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}} \to \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ ist ein symmetrischer, bilinearer Operator.*

Beweis. Übung. ☐

Satz 5.1.10. *Für alle $M, N \in \mathscr{H}^2$ gilt*

$$\langle M, N\rangle_{\mathscr{H}^2} = \mathbb{E}[M_0 N_0] + \mathbb{E}[\langle M, N\rangle_\infty].$$

Beweis. Nach Satz 5.1.7(c) gilt $MN - \langle M, N\rangle \in \mathscr{M}$. Also folgt mit dem Stoppsatz von Doob (Satz 2.3.23)

$$\mathbb{E}[M_\infty N_\infty - \langle M, N\rangle_\infty] = \mathbb{E}[M_0 N_0 - \langle M, N\rangle_0] = \mathbb{E}[M_0 N_0],$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}\langle M, N\rangle_{\mathscr{H}^2} &= \mathbb{E}[M_\infty N_\infty] = \mathbb{E}[M_\infty N_\infty - \langle M, N\rangle_\infty] + \mathbb{E}[\langle M, N\rangle_\infty] \\ &= \mathbb{E}[M_0 N_0] + \mathbb{E}[\langle M, N\rangle_\infty].\end{aligned}$$

□

Lemma 5.1.11. *Für $M \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$ und $X \in \mathscr{L}^2(\mathscr{F}_0)$ gilt $XM \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$.*

Beweis. Übung. □

Korollar 5.1.12. *Für $M, N \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$ gilt $\langle M, N\rangle = \langle M - M_0, N - N_0\rangle$.*

Beweis. Nach Satz 5.1.7(a) gilt

$$MN - \langle M, N\rangle \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}.$$

Nach Lemma 5.1.11 gilt

$$MN_0, M_0 N \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}.$$

Außerdem gilt $M_0 N_0 \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$. Es folgt

$$\begin{aligned}&(M - M_0)(N - N_0) - \langle M, N\rangle \\ &= (\underbrace{MN - \langle M, N\rangle}_{\in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}}) - (\underbrace{MN_0 + M_0 N - M_0 N_0}_{\in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}}) \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}.\end{aligned}$$

□

Satz 5.1.13. *Es seien $M, N \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$ beliebig.*

(a) Es gilt ${}^p(\Delta M \Delta N) = \Delta\langle M, N\rangle$.

(b) Sind M und N quasi-linksstetig, so ist $\langle M, N\rangle$ stetig.

Beweis. Übung. □

Satz 5.1.14. *Es sei W ein Wiener-Prozess mit Varianzfunktion σ^2.*

(a) Es gilt $W \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$ mit $\langle W, W\rangle = \sigma^2$.

(b) Die Varianzfunktion σ^2 ist stetig.

Beweis. Übung. □

5.2 Zerlegungen von lokalen Martingalen

Definition 5.2.1.

(a) *Zwei lokale Martingale $M, N \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ heißen orthogonal (in Zeichen $M \perp N$), falls $MN \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$. (Falls $M, N \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$, gilt also $\langle M, N \rangle = 0$.)*

(b) *Ein lokales Martingal $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ heißt rein unstetig, falls $M_0 = 0$ und $M \perp N$ für alle stetigen lokalen Martingale $N \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ gilt.*

Lemma 5.2.2.

(a) *Die Menge aller stetigen lokalen Martingale ist ein Unterraum von $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$.*

(b) *Die Menge aller rein unstetigen lokalen Martingale ist ein Unterraum von $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$.*

Beweis. Übung. □

Satz 5.2.3.

(a) *Für ein lokales Martingal $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ gilt $M \perp M$ genau dann, wenn $M_0 \in \mathscr{L}^2$ und $M = M_0$ bis auf Ununterscheidbarkeit.*

(b) *Es sei $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ ein rein unstetiges lokales Martingal mit stetigen Pfaden. Dann gilt $M = 0$ bis auf Ununterscheidbarkeit.*

(c) *Es seien $M, N \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ zwei lokale Martingale mit $M \perp N$. Dann gilt $M^S \perp N^T$ für alle Stoppzeiten S, T.*

Beweis.

(a) Falls $M_0 \in \mathscr{L}^2$ und $M = M_0$, dann gilt $M^2 = M_0^2 \in \mathscr{H}^2 \subset \mathscr{M}$, und somit $M \perp M$. Umgekehrt gelte $M \perp M$. Dann gilt $M^2 \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$, und somit $M_0 \in \mathscr{L}^2$. Durch Lokalisierung dürfen wir annehmen, dass $M, M^2 \in \mathscr{M}$, und somit $M \in \mathscr{H}^2$. Nach Korollar 2.3.24 folgt für alle $t \in \mathbb{R}_+$

$$\mathbb{E}[(M_t - M_0)^2] = \mathbb{E}[M_t^2] - \mathbb{E}[M_0^2] = 0.$$

Also gilt $\mathbb{P}(M_t = M_0) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Da M càdlàg ist, folgt $M = M_0$ bis auf Ununterscheidbarkeit.

(b) Es gilt $M \perp M$, und somit folgt nach Teil (a), dass $M = 0$ bis auf Ununterscheidbarkeit.

(c) Da $\mathscr{M}_{\text{loc}}$ stabil unter Stoppen ist, genügt es, die Aussage für $T = \infty$ zu beweisen. Es sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge, so dass $M^{T_n}, N^{T_n}, (MN)^{T_n} \in \mathscr{M}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jede Stoppzeit R

$$\begin{aligned}(M^S N)_R &= M^S_R N_R = M_R N_R \mathbb{1}_{\{R\leq S\}} + M_S N_R \mathbb{1}_{\{S<R\}} \\ &= M_R N_R \mathbb{1}_{\{R\leq S\}} + M_S N_S \mathbb{1}_{\{S<R\}} + M_S(N_R - N_S)\mathbb{1}_{\{S<R\}} \\ &= (MN)_{R\wedge S} + M_S(N_R - N_S)\mathbb{1}_{\{S<R\}},\end{aligned}$$

und damit folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$ nach dem Stoppsatz von Doob (Satz 2.3.23)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M^S N)^{T_n}_R] &= \mathbb{E}[(MN)^{T_n}_{R\wedge S}] + \mathbb{E}[M^{T_n}_S (N^{T_n}_R - N^{T_n}_S)\mathbb{1}_{\{S<R\}}] \\ &= \mathbb{E}[(MN)^{T_n}_0] + \mathbb{E}[M^{T_n}_S \mathbb{1}_{\{S<R\}} \underbrace{\mathbb{E}[N^{T_n}_{S\vee R} - N^{T_n}_S \mid \mathscr{F}_S]}_{=0}] = \mathbb{E}[(M^S N)^{T_n}_0].\end{aligned}$$

Nach dem Stoppsatz von Doob (Satz 2.3.23) folgt, dass $(M^S N)^{T_n} \in \mathscr{M}$. Insgesamt folgt $M^S N \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$, und damit $M^S \perp N$.

□

Korollar 5.2.4. *Es seien $M, N \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$ zwei rein unstetige lokale Martingale mit $\Delta M = \Delta N$ bis auf Ununterscheidbarkeit. Dann gilt $M = N$ bis auf Ununterscheidbarkeit.*

Beweis. Übung. □

Lemma 5.2.5. *Für ein lokales Martingal $M \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$ mit $M_0 = 0$ und eine $\mathscr{F}_0$-messbare Zufallsvariable X gilt $XM \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$.*

Beweis. Übung. □

Lemma 5.2.6. *Es seien $M, N \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$ zwei lokale Martingale, so dass eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(a) $M, N \in \mathscr{H}^2_{\text{loc}}$.

(b) $M_0 = 0$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) *Es gilt* $M \perp N$.

(ii) *Es gilt* $M \perp N - N_0$.

Beweis. Nach Lemma 5.1.11 im Fall (a) bzw. Lemma 5.2.5 im Fall (b) gilt $MN_0 \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$. Also gilt:

$$M \perp N \quad \Leftrightarrow \quad MN \in \mathscr{M}_{\text{loc}} \quad \Leftrightarrow \quad M(N - N_0) \in \mathscr{M}_{\text{loc}} \quad \Leftrightarrow \quad M \perp N - N_0.$$

□

Satz 5.2.7.

(a) Ein lokales Martingal $M \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$ mit $M_0 = 0$ ist genau dann rein unstetig, wenn $M \perp N$ für alle stetigen, beschränkten Martingale N mit $N_0 = 0$.

(b) Jedes lokale Martingal $M \in \mathscr{M}_{\text{loc}} \cap \mathscr{V}$ ist rein unstetig.

Beweis.

(a) Wir brauchen nur eine Implikation zu beweisen. Es sei $N \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$ ein stetiges lokales Martingal. Nach Lemma 5.2.6 gilt

$$M \perp N \quad \Leftrightarrow \quad M \perp N - N_0.$$

Da $N - N_0$ stetig und lokal beschränkt ist, folgt die reine Unstetigkeit von M durch Lokalisierung.

(b) Es sei $M \in \mathscr{M}_{\text{loc}} \cap \mathscr{V}$. Nach Satz 4.2.13 gilt $M \in \mathscr{A}_{\text{loc}}$. Weiterhin sei N ein stetiges, beschränktes Martingal. Nach Satz 4.4.10(a) gilt $MN - N \cdot M \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$. Da N beschränkt ist, gilt außerdem $N \cdot M \in \mathscr{A}_{\text{loc}}$, und somit folgt nach Satz 4.5.12, dass $N \cdot M \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$. Insgesamt folgt

$$MN = (MN - N \cdot M) + N \cdot M \in \mathscr{M}_{\text{loc}},$$

das heißt $M \perp N$, was wegen Teil (a) den Beweis abschließt.

□

Korollar 5.2.8. *Für jedes $A \in \mathscr{A}_{\text{loc}}$ ist $A - A^p \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$ ein rein unstetiges lokales Martingal.*

Beweis. Übung. □

Korollar 5.2.9. *Für einen verallgemeinerten Poisson-Prozess N mit Intensität a ist $N - a \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$ ein rein unstetiges lokales Martingal.*

Beweis. Übung. □

Lemma 5.2.10. *Für alle $M, N \in \mathscr{H}^2$ mit $M \perp N$ gilt $MN \in \mathscr{M}$.*

Beweis. Wegen $M \perp N$ gilt $MN \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$, und somit $\langle M, N\rangle = 0$. Mit Satz 5.1.7(c) folgt

$$MN = MN - \langle M, N\rangle \in \mathscr{M}.$$

□

Satz 5.2.11. *Für $M, N \in \mathscr{H}^2$ sind äquivalent:*

(i) $\langle M, N\rangle = 0$.

(ii) $M \perp N$.

(iii) $MN \in \mathscr{M}$.

(iv) $\langle M^T, N - N_0\rangle_{\mathscr{H}^2} = 0$ *für jede Stoppzeit* T.

Beweis. (i) ⇔ (ii): Es gilt

$$\langle M, N\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad MN \in \mathscr{M}_{\text{loc}} \quad \Leftrightarrow \quad M \perp N.$$

(i) ⇒ (iii): Folgt aus Lemma 5.2.10.
(iii) ⇒ (i): Aus $MN \in \mathscr{M} \subset \mathscr{M}_{\text{loc}}$ folgt $\langle M, N\rangle = 0$.
(ii) ⇒ (iv): Es sei T eine beliebige Stoppzeit. Nach Lemma 5.2.6 gilt $M \perp N - N_0$, und mit Satz 5.2.3 folgt $M^T \perp N - N_0$. Nach Korollar 2.3.25 ist die Klasse $\mathscr{H}^2$ stabil unter Stoppen, und somit gilt $M^T, N - N_0 \in \mathscr{H}^2$. Mit Lemma 5.2.10 folgt $M^T(N - N_0) \in \mathscr{M}$, und mit dem Stoppsatz von Doob (Satz 2.3.23) erhalten wir

$$\langle M^T, N - N_0\rangle_{\mathscr{H}^2} = \mathbb{E}[M_\infty^T(N_\infty - N_0)] = \mathbb{E}[M_0^T(N_0 - N_0)] = 0.$$

(iv) ⇒ (iii): Für jede Stoppzeit T gilt nach Satz 2.3.22

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_T N_T] &= \mathbb{E}[M_T \mathbb{E}[N_\infty \,|\, \mathscr{F}_T]] = \mathbb{E}[M_T N_\infty] = \mathbb{E}[M_\infty^T(N_\infty - N_0)] + \mathbb{E}[M_T N_0] \\ &= \underbrace{\langle M^T, N - N_0\rangle_{\mathscr{H}^2}}_{=0} + \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_T N_0 \,|\, \mathscr{F}_0]] = \mathbb{E}[N_0 \mathbb{E}[M_T \,|\, \mathscr{F}_0]] = \mathbb{E}[M_0 N_0].\end{aligned}$$

Nach dem Stoppsatz von Doob (Satz 2.3.23) folgt $MN \in \mathscr{M}$. □

Korollar 5.2.12. *Für jedes $N \in \mathscr{H}_0^2$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *N ist rein unstetig.*

(ii) *Es gilt $N \in \mathscr{H}_0^{2,d}$.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Es sei $M \in \mathscr{H}_0^{2,c}$ beliebig. Nach Definition 5.2.1 gilt $M \perp N$, und mit Satz 5.2.11 folgt $\langle M, N \rangle_{\mathscr{H}^2} = 0$. Also gilt $N \in \mathscr{H}_0^{2,d}$.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Es sei M ein stetiges, beschränktes Martingal mit $M_0 = 0$. Dann gilt $M \in \mathscr{H}_0^{2,c}$. Für jede Stoppzeit T gilt $M^T \in \mathscr{H}_0^{2,c}$, und somit

$$\langle M^T, N \rangle_{\mathscr{H}^2} = 0.$$

Nach Satz 5.2.11 folgt, dass $M \perp N$. Also liefert Satz 5.2.7(a), dass N rein unstetig ist. □

Satz 5.2.13. *Es sei $a > 0$ beliebig. Jedes $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ besitzt eine Zerlegung $M = M_0 + M' + M''$ mit $M' \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{V}$, $M'' \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$, so dass $M'_0 = M''_0 = 0$ und $|\Delta M''| \leq a$. Insbesondere ist M' rein unstetig, und es gilt $M'' \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$.*

Beweis. Durch Lokalisierung dürfen wir annehmen, dass $M \in \mathscr{M}$. Wir setzen $b := a/2$. Da M càdlàg ist, ist der Prozess

$$A := \sum_{s \leq \bullet} \Delta M_s \mathbb{1}_{\{|\Delta M_s| > b\}}$$

wohldefiniert mit $A \in \mathscr{V}$. Nach Lemma 1.6.8 ist die Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definert durch

$$T_n := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : \operatorname{Var}(A)_t > n\} \wedge \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : |M_t| > n\}$$

eine lokalisierende Folge von Stoppzeiten. Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach dem Stoppsatz von Doob (Satz 2.3.23) gilt $M_{T_n} \in \mathscr{L}^1$, und nach Lemma 4.1.2(c) gilt

$$\operatorname{Var}(A)_{T_n} \leq \operatorname{Var}(A)_{T_n-} + |M_{T_n-}| + |M_{T_n}| \leq 2n + |M_{T_n}| \in \mathscr{L}^1.$$

Es folgt $\operatorname{Var}(A) \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$, und damit $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$. Wir definieren

$$M' := A - A^p \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{V},$$
$$M'' := M - M' - M_0 \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}.$$

Dann gilt $M'_0 = M''_0 = 0$ und die Zerlegung

$$M = M_0 + M' + M''.$$

Wir setzen

$$X := \Delta M \mathbb{1}_{\{|\Delta M| \leq b\}}.$$

Dann gilt $\Delta A = \Delta M - X$. Nach Satz 3.4.7(a) gilt ${}^p(\Delta M) = 0$, und mit Lemma 4.5.8(d) folgt

$$\Delta(A^p) = {}^p(\Delta A) = {}^p(\Delta M - X) = -{}^p X.$$

Es gilt

$$\Delta M'' = \Delta M - \Delta M' = \Delta M - \Delta A + \Delta(A^p) = X - {}^pX.$$

Wegen $|X| \leq b$ gilt nach Lemma 3.4.6(d), dass $|{}^pX| \leq b$, und es folgt

$$|\Delta M''| \leq |X| + |{}^pX| \leq 2b = a.$$

□

Bemerkung 5.2.14. *Die Zerlegung $M = M_0 + M' + M''$ aus Satz 5.2.13 ist im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.*

Satz 5.2.15. *Jedes lokale Martingal $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ besitzt eine bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig bestimmte Zerlegung*

$$M = M_0 + M^c + M^d,$$

wobei $M^c \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ ein stetiges lokales Martingal mit $M_0^c = 0$, und $M^d \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ ein rein unstetiges lokales Martingal mit $M_0^d = 0$ ist.

Beweis.

(i) Existenz: Nach Satz 5.2.13 existieren ein rein unstetiges lokales Martingal $M' \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{V}$ und $M'' \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$, so dass

$$M = M_0 + M' + M''$$

und $M'_0 = M''_0 = 0$. Durch Lokalisierung dürfen wir annehmen, dass $M'' \in \mathscr{H}^2$. Nach Satz 2.3.32(f) existiert eine Zerlegung

$$M'' = (M'')^c + (M'')^d$$

mit $(M'')^c \in \mathscr{H}_0^{2,c}$ und $(M'')^d \in \mathscr{H}_0^{2,d}$. Weiterhin ist $(M'')^d$ nach Korollar 5.2.12 rein unstetig. Wir setzen $M^c := (M'')^c$ und $M^d := M' + (M'')^d$. Dann ist $M^c \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ stetig, $M^d \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ ist rein unstetig, es gilt $M_0^c = M_0^d = 0$ und

$$M = M_0 + M' + M'' = M_0 + M' + (M'')^c + (M'')^d = M_0 + M^c + M^d.$$

(ii) Eindeutigkeit: Es seien

$$M = M_0 + M^c + M^d \quad \text{und} \quad M = M_0 + N^c + N^d$$

zwei derartige Zerlegungen. Dann ist

$$M^c - N^c = M - M_0 = N^d - M^d \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$$

ein rein unstetiges lokales Martingal mit stetigen Pfaden, und mit Satz 5.2.3(b) folgt $M^c = N^c$ und $M^d = N^d$ bis auf Ununterscheidbarkeit.

□

Kapitel 6

Semimartingale und stochastische Integration

Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ eine stochastische Basis.

6.1 Semimartingale

Definition 6.1.1. *Wir bezeichnen mit* $\mathscr{L}$ *den Vektorraum aller lokalen Martingale* $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ *mit* $M_0 = 0$.

Definition 6.1.2.

(a) Ein Semimartingal ist ein Prozess X *der Form* $X = X_0 + M + A$ *mit* $M \in \mathscr{L}$ *und* $A \in \mathscr{V}$.

(b) Wir bezeichnen mit $\mathscr{S}$ *die Menge aller Semimartingale.*

(c) Ein spezielles Semimartingal ist ein Semimartingal X *mit einer Zerlegung* $X = X_0 + M + A$, *bei der* A *previsibel ist. (Folglich gilt* $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$.*)*

(d) Wir bezeichnen mit $\mathscr{S}_p$ *die Menge aller speziellen Semimartingale.*

Lemma 6.1.3.

(a) $\mathscr{S}$ *ist ein Vektorraum, und* $\mathscr{S}_p$ *ist ein Unterraum von* $\mathscr{S}$.

(b) Es gelten die Inklusionen $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \subset \mathscr{S}_p$, $\mathscr{A}_{\mathrm{loc}} \subset \mathscr{S}_p$ *und* $\mathscr{V} \subset \mathscr{S}$.

Beweis. Übung. □

Satz 6.1.4. *Für jedes spezielle Semimartingal* $X \in \mathscr{S}_p$ *existiert eine bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig bestimmte Zerlegung* $X = X_0 + M + A$ *mit* $M \in \mathscr{L}$ *und einem previsiblen Prozess* $A \in \mathscr{V}$.

Beweis. Es seien $X = X_0 + M + A$ und $X = X_0 + N + B$ zwei derartige Zerlegungen. Dann gilt

$$M + A = X - X_0 = N + B,$$

und somit ist

$$M - N = B - A \in \mathscr{M}_{\text{loc}} \cap \mathscr{V}$$

ein previsibles lokales Martingal, und mit Korollar 4.5.3 folgt $M = N$ und $A = B$ bis auf Ununterscheidbarkeit. □

Definition 6.1.5. *Für ein spezielles Semimartingal $X \in \mathscr{S}_p$ nennen wir die eindeutig bestimmte Zerlegung $X = X_0 + M + A$ aus Satz 6.1.4 die kanonische Zerlegung von X.*

Definition 6.1.6. *Für einen adaptierten càdlàg-Prozess X definieren wir den Prozess X^* durch $X_t^* := \sup_{s \le t} |X_s|$ für $t \in \mathbb{R}_+$.*

Bemerkung 6.1.7. *Nach Satz 1.2.8 gilt $X^* \in \mathscr{V}^+$.*

Lemma 6.1.8. *Für $M \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$ gilt $M^* \in \mathscr{A}_{\text{loc}}^+$.*

Beweis. Es sei $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge, so dass $M^{T_n} \in \mathscr{M}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$S_n := T_n \wedge \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : |M_t| > n\}$$

nach Lemma 1.6.8 eine lokalisierende Folge von Stoppzeiten mit $S_n \le T_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $M_{S_n} \in \mathscr{L}^1$ nach Satz 2.3.22, und damit

$$M_{S_n}^* \le \sup_{s < S_n} |M_s| + |M_{S_n}| \le n + |M_{S_n}| \in \mathscr{L}^1.$$

Insgesamt folgt $M^* \in \mathscr{A}_{\text{loc}}^+$. □

Satz 6.1.9. *Für ein Semimartingal $X \in \mathscr{S}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt $X \in \mathscr{S}_p$.

(ii) Es gibt eine Semimartingal-Zerlegung $X = X_0 + M + A$ mit $A \in \mathscr{A}_{\text{loc}}$.

(iii) Für jede Semimartingal-Zerlegung $X = X_0 + M + A$ gilt $A \in \mathscr{A}_{\text{loc}}$.

(iv) Es gilt $X^* \in \mathscr{A}_{\text{loc}}^+$.

Beweis. (iii) $\Rightarrow$ (ii): Ist klar.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Für $X = X_0 + M + A$ mit $A \in \mathscr{A}_{\text{loc}}$ gilt $X = X_0 + M' + A'$, wobei $A' = A^p \in \mathscr{V}$ previsibel ist, und $M' = M + A - A' \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$.
(i) $\Rightarrow$ (iv): Für $X = X_0 + M + A$ mit A previsibel gilt nach Satz 4.2.12

$$A^* \leq \operatorname{Var}(A) \in \mathscr{A}_{\text{loc}}^+.$$

Nach Lemma 6.1.8 gilt $M^* \in \mathscr{A}_{\text{loc}}^+$, und somit folgt $X^* \in \mathscr{A}_{\text{loc}}^+$.
(iv) $\Rightarrow$ (iii): Es sei $X = X_0 + M + A$ eine Semimartingal-Zerlegung. Nach Lemma 6.1.8 gilt $M^* \in \mathscr{A}_{\text{loc}}^+$. Wegen $X^* \in \mathscr{A}_{\text{loc}}^+$ folgt $A^* \in \mathscr{A}_{\text{loc}}^+$. Nach Satz 4.2.12 ist $\operatorname{Var}(A)_-$ lokal beschränkt, und nach Lemma 4.1.2(c) gilt

$$\operatorname{Var}(A) \leq \operatorname{Var}(A)_- + |A_-| + |A| \leq \operatorname{Var}(A)_- + 2A^*.$$

Insgesamt folgt $A \in \mathscr{A}_{\text{loc}}$. □

Lemma 6.1.10. *Es sei $X \in \mathscr{S}_p$ ein spezielles Semimartingal mit kanonischer Zerlegung $X = X_0 + M + A$. Dann gilt ${}^p(\Delta X) = \Delta A$.*

Beweis. Übung. □

Satz 6.1.11. *Es sei $X \in \mathscr{S}$ ein Semimartingal.*

(a) Falls ein $a \geq 0$ mit $|\Delta X| \leq a$ existiert, dann gilt $X \in \mathscr{S}_p$, und für die kanonische Zerlegung $X = X_0 + M + A$ gilt $|\Delta A| \leq a$ und $|\Delta M| \leq 2a$.

(b) Falls X stetig ist, dann gilt $X \in \mathscr{S}_p$, und die Prozesse M und A der kanonischen Zerlegung $X = X_0 + M + A$ sind ebenfalls stetig.

Beweis.

(a) Nach Lemma 1.6.8 ist die Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$T_n := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : |X_t| > n\}$$

eine lokalisierende Folge von Stoppzeiten. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$X_{T_n}^* \leq |X_{T_n-}^*| + |\Delta X_{T_n}^*| \leq \sup_{t < T_n} |X_t| + |\Delta X_{T_n}| \leq n + a,$$

und somit folgt $X^* \in \mathscr{A}_{\text{loc}}^+$. Also gilt nach Satz 6.1.9, dass $X \in \mathscr{S}_p$. Nun betrachten wir die kanonische Zerlegung $X = X_0 + M + A$. Nach Lemma 6.1.10 gilt ${}^p(\Delta X) = \Delta A$. Wegen $|\Delta X| \leq a$ gilt nach Lemma 3.4.6(d), dass $|\Delta A| = |{}^p(\Delta X)| \leq a$, und es folgt $|\Delta M| \leq |\Delta X| + |\Delta A| \leq 2a$.

(b) Folgt aus Teil (a).

□

Satz 6.1.12. *Es sei X ein quasi-linksstetiges spezielles Semimartingal mit kanonischer Zerlegung $X = X_0 + M + A$. Dann ist auch M quasi-linksstetig, und A ist stetig.*

Beweis. Übung. □

Satz 6.1.13. *Die Klassen $\mathscr{S}$ und $\mathscr{S}_p$ sind stabil unter Stoppen.*

Beweis. Übung. □

Satz 6.1.14. *Zu jedem $X \in \mathscr{S}$ existiert ein bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig bestimmtes stetiges lokales Martingal $X^c \in \mathscr{L}$, so dass für jede Semimartingal-Zerlegung*

$$X = X_0 + M + A$$

gilt $M^c = X^c$.

Beweis. Es seien zwei Zerlegungen $X = X_0 + M + A$ und $X = X_0 + N + B$ gegeben. Wir zerlegen $M = M^c + M^d$ und $N = N^c + N^d$ gemäß Satz 5.2.15. Dann gilt

$$M^c + M^d + A = M + A = X - X_0 = N + B = N^c + N^d + B,$$

und somit ist

$$(M^c - N^c) + (M^d - N^d) = B - A \in \mathscr{M}_{\text{loc}} \cap \mathscr{V}$$

ein lokales Martingal, welches nach Satz 5.2.7(b) rein unstetig ist. Also folgt nach Satz 5.2.15, dass $M^c = N^c$ bis auf Ununterscheidbarkeit. □

Definition 6.1.15. *Wir nennen X^c den stetigen Martingalanteil von X.*

Satz 6.1.16. *Zu jedem $X \in \mathscr{S}$ existiert eine Zerlegung*

$$X = X_0 + X^c + M + A$$

mit einem rein unstetigen lokalen Martingal $M \in \mathscr{H}^2_{\text{loc}}$ mit $M_0 = 0$ und $A \in \mathscr{V}$.

Beweis. Nach Satz 6.1.14 existiert eine Zerlegung

$$X = X_0 + X^c + N + B$$

mit einem rein unstetigen lokalen Martingal $N \in \mathscr{L}$ und einem Prozess $B \in \mathscr{V}$. Nach Satz 5.2.13 existiert eine Zerlegung $N = N' + N''$ mit einem rein unstetigen lokalen Martingal $N' \in \mathscr{M}_{\text{loc}} \cap \mathscr{V}$ und $N'' \in \mathscr{H}^2_{\text{loc}}$, so dass $N'_0 = N''_0 = 0$. Wegen $N'' = N - N'$ ist N'' ebenfalls rein unstetig. Wir setzen $M := N'' \in \mathscr{H}^2_{\text{loc}}$ und $A := N' + B \in \mathscr{V}$. Dann ist M rein unstetig, es gilt $M_0 = 0$ und

$$X = X_0 + X^c + N + B = X_0 + X^c + N' + N'' + B = X_0 + X^c + M + A.$$

□

6.2 Das stochastische Integral

Das Ziel dieses Abschnittes ist die Konstruktion des stochastischen Integrals

$$H \cdot X = \left(\int_0^t H_s dX_s \right)_{t \in \mathbb{R}_+}$$

für ein Semimartingal X und einen geeigneten Prozess H.

Definition 6.2.1. *Wir definieren die Menge*

$$\begin{aligned} \mathcal{E} := &\{Y \mathbb{1}_{\{0\}} : Y \text{ ist beschränkt und } \mathscr{F}_0\text{-messbar}\} \\ &\cup \{Y \mathbb{1}_{(r,s]} : 0 \leq r < s,\ Y \text{ ist beschränkt und } \mathscr{F}_r\text{-messbar}\}. \end{aligned}$$

Definition 6.2.2. *Für $X \in \mathscr{S}$ und $H \in \mathcal{E}$ definieren wir das stochastische Integral*

$$H \cdot X := \begin{cases} 0, & \text{falls } H = Y \mathbb{1}_{\{0\}}, \\ Y(X^s - X^r), & \text{falls } H = Y \mathbb{1}_{(r,s]}. \end{cases}$$

Lemma 6.2.3. *Für alle $H \in \mathcal{E}$ und $M \in \mathscr{M}$ gilt $H \cdot M \in \mathscr{M}$.*

Beweis. Übung. □

Lemma 6.2.4. *Für alle $H, K \in \mathcal{E}$ mit $\{H \neq 0\} \cap \{K \neq 0\} = \emptyset$ und alle $M, N \in \mathscr{H}^2$ gilt $(H \cdot M)(K \cdot N) \in \mathscr{M}$.*

Beweis. Übung. □

Definition 6.2.5. *Es seien $(Y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ und Y Prozesse. Wir sagen, dass $(Y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit gegen Y konvergiert (und schreiben $Y^n \overset{\mathbb{P}}{\Rightarrow} Y$), falls*

$$\sup_{s \in [0,t]} |Y_s^n - Y_s| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Lemma 6.2.6. *Die Menge aller lokal beschränkten, previsiblen Prozesse ist ein Vektorraum, der $\mathcal{E}$ umfaßt.*

Beweis. Übung. □

Satz 6.2.7. *Es sei $X \in \mathscr{S}$. Dann hat die auf $\mathcal{E}$ definierte Abbildung $H \mapsto H \cdot X$ eine eindeutig bestimmte Fortsetzung auf den Raum aller lokal beschränkten, previsiblen Prozesse mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $H \cdot X$ ist für jeden lokal beschränkten, previsiblen Prozess H ein adaptierter càdlàg-Prozess.

(ii) *Die Abbildung $H \mapsto H \cdot X$ ist linear.*

(iii) *Für jede Folge $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von previsiblen Prozessen, so dass $H^n \to H$ punktweise für einen Prozess H und $|H^n| \leq K$ für einen lokal beschränkten, previsiblen Prozess K gilt $H^n \cdot X \overset{\mathbb{P}}{\Rightarrow} H \cdot X$.*

Beweis. Siehe [JS03, Thm. 4.31]. □

Satz 6.2.8. *Die Abbildung $(H, X) \mapsto H \cdot X$ ist bilinear.*

Beweis. Siehe [JS03, 4.33]. □

Satz 6.2.9. *Es seien $X \in \mathscr{S}$ und H, K lokal beschränkte, previsible Prozesse.*

(a) *Es gilt $H \cdot X \in \mathscr{S}$ mit $(H \cdot X)_0 = 0$.*

(b) *Für $X \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$ gilt auch $H \cdot X \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$.*

(c) *Für $X \in \mathscr{V}$ gilt auch $H \cdot X \in \mathscr{V}$, und $H \cdot X$ stimmt mit dem Stieltjes-Integral aus Definition 4.4.2 überein.*

(d) $H \cdot X = H \cdot (X - X_0)$.

(e) *Für jede Semimartingal-Zerlegung $X = X_0 + M + A$ gilt $H \cdot X = H \cdot M + H \cdot A$.*

(f) $\Delta(H \cdot X) = H\Delta X$.

(g) $(H \cdot X)^T = (H\mathbb{1}_{[\![0,T]\!]}) \cdot X$ *für jede Stoppzeit T.*

(h) $K \cdot (H \cdot X) = (KH) \cdot X$.

(i) *Es seien T eine previsible Zeit und Y eine $\mathscr{F}_{T-}$-messbare Zufallsvariable. Dann gilt $(Y\mathbb{1}_{[\![T]\!]}) \cdot X = Y\Delta X_T \mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![}$.*

Beweis. Siehe [JS03, 4.34 - 4.38]. □

Definition 6.2.10. *Es sei $X \in \mathscr{H}^2_{\text{loc}}$ beliebig.*

(a) *Wir bezeichnen mit $L^2(X)$ die Menge aller previsiblen Prozesse H, so dass $H^2 \cdot \langle X, X\rangle \in \mathscr{A}^+$.*

(b) *Wir bezeichnen mit $L^2_{\text{loc}}(X)$ die Menge aller previsiblen Prozesse H, so dass $H^2 \cdot \langle X, X\rangle \in \mathscr{A}^+_{\text{loc}}$.*

Lemma 6.2.11. *Für jedes $X \in \mathscr{H}^2_{\text{loc}}$ ist $L^2_{\text{loc}}(X)$ ein Vektorraum, und $L^2(X)$ ist ein Unterraum.*

Beweis. Übung. □

Lemma 6.2.12. *Es sei $X \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$ beliebig. Dann liegt jeder lokal beschränkte, previsible Prozess H in $L^2_{\mathrm{loc}}(X)$.*

Beweis. Übung. □

Satz 6.2.13. *Es sei $X \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$. Dann hat die durch Satz 6.2.7 bestimmte Abbildung $H \mapsto H \cdot X$ eine eindeutig bestimmte Fortsetzung auf den Raum $L^2_{\mathrm{loc}}(X)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $H \cdot X$ ist für alle $H \in L^2_{\mathrm{loc}}(X)$ ein adaptierter càdlàg-Prozess.

(ii) Die Abbildung $H \mapsto H \cdot X$ ist linear.

(iii) Für jede Folge $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von previsiblen Prozessen, so dass $H^n \to H$ punktweise für einen Prozess H und $|H^n| \leq K$ für einen Prozess $K \in L^2_{\mathrm{loc}}(X)$ gilt $H^n \cdot X \overset{\mathbb{P}}{\Rightarrow} H \cdot X$.

Beweis. Siehe [JS03, Thm. 4.40]. □

Bemerkung 6.2.14. *Das stochastische Integral $H \mapsto H \cdot X$ aus Satz 6.2.13 wird auch als Itô-Integral (speziell für einen Standard-Wiener-Prozess $X = W$) bezeichnet.*

Satz 6.2.15. *Die Abbildung $(H, X) \mapsto H \cdot X$ ist bilinear.*

Beweis. Siehe [JS03, Thm. 4.40]. □

Satz 6.2.16. *Es seien $X, Y \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$, $H \in L^2_{\mathrm{loc}}(X)$ und $K \in L^2_{\mathrm{loc}}(Y)$.*

(a) Es gilt $H \cdot X \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$ mit $(H \cdot X)_0 = 0$.

(b) Es gilt $H \cdot X \in \mathscr{H}^2$ genau dann, wenn $H \in L^2(X)$.

(c) Es gilt

$$\langle H \cdot X, K \cdot Y \rangle = (HK) \cdot \langle X, Y \rangle.$$

(d) Für $H \in L^2(X)$ und $K \in L^2(Y)$ gilt die Itô-Isometrie

$$\mathbb{E}[(H \cdot X)_\infty (K \cdot Y)_\infty] = \mathbb{E}[((HK) \cdot \langle X, Y \rangle)_\infty].$$

(e) $H \cdot X = H \cdot (X - X_0)$.

(f) $\Delta(H \cdot X) = H \Delta X$.

(g) $(H \cdot X)^T = (H\mathbb{1}_{[\![0,T]\!]}) \cdot X$ *für jede Stoppzeit* T.

(h) $K \cdot (H \cdot X) = (KH) \cdot X$, *falls* $K \in L^2_{\text{loc}}(H \cdot X)$.

Beweis. Siehe [JS03, Thm. 4.40]. □

Definition 6.2.17.

(a) *Eine adaptierte Zerlegung ist eine Folge* $\tau = (T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *von Stoppzeiten mit* $T_0 = 0$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n = \infty$ *und* $T_n < T_{n+1}$ *auf* $\{T_n < \infty\}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) *Es seien* $X \in \mathscr{S}$ *ein Semimartingal,* H *ein adaptierter Prozess und* $\tau = (T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine adaptierte Zerlegung. Dann nennen wir den Prozess* $\tau(H \cdot X)$ *definiert durch*

$$\tau(H \cdot X)_t := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} H_{T_n}(X_{T_{n+1}\wedge t} - X_{T_n\wedge t}), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

die τ*-Riemann'sche Approximation von* $H \cdot X$.

(c) *Eine Folge* $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von adaptierten Zerlegungen* $\tau_n = (T_{n,m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ *heißt eine Riemann'sche Zerlegungsfolge, falls für alle* $t \in \mathbb{R}_+$

$$\sup_{m\in\mathbb{N}_0} |T_{n,m+1} \wedge t - T_{n,m} \wedge t| \to 0 \quad \textit{für } n \to \infty.$$

Lemma 6.2.18. *Für jeden adaptierten càdlàg-Prozess* Y *ist* $H := Y_-$ *lokal beschränkt und previsibel.*

Beweis. Nach Satz 3.1.8(a) ist Y_- previsibel. Nach Lemma 1.6.8 ist $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$T_n := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : |Y_t| > n\}$$

eine lokalisierende Folge von Stoppzeiten, und es gilt $|H^{T_n}| \le n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. □

Satz 6.2.19. *Es seien* $X \in \mathscr{S}$ *und* $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Riemann'sche Zerlegungsfolge. Ist* Y *ein adaptierter càdlàg-Prozess, dann gilt* $\tau_n(Y \cdot X) \overset{\mathbb{P}}{\Rightarrow} Y_- \cdot X$.

Beweis. [Pro05, Thm. 21]. □

Definition 6.2.20. *Es seien* $X, Y \in \mathscr{S}$ *zwei Semimartingale. Wir definieren das Stratonovich-Integral*

$$Y_- \circ X = \left(\int_0^t Y_{s-} \circ dX_s \right)_{t\in\mathbb{R}_+}$$

durch

$$Y_- \circ X := Y_- \cdot X + \frac{1}{2}\langle Y^c, X^c \rangle.$$

Lemma 6.2.21. *Das Stratonovich-Integral*

$$\mathscr{S} \times \mathscr{S} \to \mathscr{S}, \quad (Y, X) \mapsto Y_- \circ X$$

ist ein bilinearer Operator.

Beweis. Übung. □

6.3 Die quadratische Variation

Definition 6.3.1. *Es seien $X, Y \in \mathscr{S}$ zwei Semimartingale.*

(a) *Die quadratische Kovariation von X und Y ist definiert durch*

$$[X, Y] := XY - X_0 Y_0 - X_- \cdot Y - Y_- \cdot X.$$

(b) *Wir nennen $[X, X]$ die quadratische Variation von X.*

Bemerkung 6.3.2. *Es gilt also*

$$XY = X_0 Y_0 + X_- \cdot Y + Y_- \cdot X + [X, Y].$$

Falls $[X, Y] = 0$, so gilt die Formel der partiellen Integration

$$XY = X_0 Y_0 + X_- \cdot Y + Y_- \cdot X.$$

Bemerkung 6.3.3. *Für $X \in \mathscr{S}$ gilt*

$$[X, X] = X^2 - X_0^2 - 2X_- \cdot X.$$

Lemma 6.3.4.

(a) *Für alle $X, Y \in \mathscr{S}$ gilt $[X, Y] = [X - X_0, Y - Y_0]$.*

(b) *Für alle $X, Y \in \mathscr{S}$ gilt die Polarisierungsformel*

$$[X, Y] = \frac{1}{4}\big([X + Y, X + Y] - [X - Y, X - Y]\big).$$

Beweis. Übung. □

Definition 6.3.5. *Es seien $X, Y \in \mathscr{S}$ und $\tau = (T_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine adaptierte Zerlegung. Wir definieren den Prozess $S_\tau(X, Y)$ durch*

$$S_\tau(X, Y)_t := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (X_{T_{n+1} \wedge t} - X_{T_n \wedge t})(Y_{T_{n+1} \wedge t} - Y_{T_n \wedge t}), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Satz 6.3.6. *Es seien $X, Y \in \mathscr{S}$ zwei Semimartingale.*

(a) *Für jede Riemann'sche Zerlegungsfolge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $S_{\tau_n}(X,Y) \overset{\mathbb{P}}{\Rightarrow} [X,Y]$.*

(b) *Es gilt $[X,X] \in \mathscr{V}^+$ und $X^2 \in \mathscr{S}$.*

(c) *Es gilt $[X,Y] \in \mathscr{V}$ und $XY \in \mathscr{S}$.*

(d) *Es gilt $\Delta[X,Y] = \Delta X \Delta Y$.*

Beweis.

(a) Für jede adaptierte Zerlegung $\tau = (T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gilt

$$S_\tau(X,Y) = \frac{1}{4}\big(S_\tau(X+Y,X+Y) - S_\tau(X-Y,X-Y)\big),$$

und folglich genügt es, die Aussage für $X = Y$ zu beweisen. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x-y)^2 = x^2 - y^2 - 2y(x-y),$$

und darum für alle $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} S_\tau(X,X)_t &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (X_{T_{n+1}\wedge t} - X_{T_n\wedge t})^2 \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \big(X^2_{T_{n+1}\wedge t} - X^2_{T_n\wedge t} - 2X_{T_n\wedge t}(X_{T_{n+1}\wedge t} - X_{T_n\wedge t})\big) \\ &= X_t^2 - X_0^2 - 2\sum_{n\in\mathbb{N}_0} X_{T_n}(X_{T_{n+1}\wedge t} - X_{T_n\wedge t}) \\ &= X_t^2 - X_0^2 - 2\tau(X\cdot X)_t. \end{aligned}$$

Nach Satz 6.2.19 folgt für jede Riemann'sche Zerlegungsfolge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dass

$$S_{\tau_n}(X,X) \overset{\mathbb{P}}{\Rightarrow} X^2 - X_0^2 - 2X_- \cdot X = [X,X].$$

(b) $[X,X]$ ist per Definition ein adaptierter càdlàg-Prozess mit $[X,X]_0 = 0$. Für jede adaptierte Zerlegung τ ist der Prozess $S_\tau(X,X)$ monoton wachsend, und somit ist nach Teil (a) auch $[X,X]$ monoton wachsend. Also gilt $[X,X] \in \mathscr{V}^+$. Nun folgt aus Definition 6.3.1, dass $X^2 = X_0^2 + [X,X] + 2X_- \cdot X \in \mathscr{S}$.

(c) Folgt aus Teil (b) und der Polarisierungsformel aus Lemma 6.3.4.

(d) Es gilt

$$\Delta X \Delta Y = \frac{1}{4}\big((\Delta X + \Delta Y)^2 - (\Delta X - \Delta Y)^2\big),$$

und folglich genügt es, die Aussage für $X = Y$ zu beweisen. Nach Definition 6.3.1, Satz 6.2.9 und der Identität

$$x^2 - y^2 = (x-y)^2 + 2y(x-y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

gilt

$$\begin{aligned}\Delta[X,X] &= \Delta(X^2 - 2X_- \cdot X) = \Delta(X^2) - 2X_-\Delta X = X^2 - X_-^2 - 2X_-\Delta X \\ &= (X - X_-)^2 + 2X_-(X - X_-) - 2X_-\Delta X = (\Delta X)^2.\end{aligned}$$

□

Lemma 6.3.7. *Die Abbildung $[\cdot,\cdot] : \mathscr{S} \times \mathscr{S} \to \mathscr{V}$ ist ein symmetrischer, bilinearer Operator.*

Beweis. Übung. □

Lemma 6.3.8. *Es seien X ein adaptierter càdlàg-Prozess und $Y \in \mathscr{V}$ mit $|\Delta X| \cdot \mathrm{Var}(Y) \in \mathscr{V}^+$. Dann gilt*

$$\Delta X \cdot Y = \sum_{s \leq \bullet} \Delta X_s \Delta Y_s$$

Beweis. Übung. □

Satz 6.3.9. *Es seien $X \in \mathscr{S}$ und $Y \in \mathscr{V}$.*

(a) Es gilt $[X,Y] = \Delta X \cdot Y$ und $XY = Y_- \cdot X + X \cdot Y$.

(b) Falls Y previsibel ist, dann gilt $[X,Y] = \Delta Y \cdot X$ und $XY = Y \cdot X + X_- \cdot Y$.

(c) Falls $X \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ und Y previsibel ist, dann gilt $[X,Y] \in \mathscr{L}$.

(d) Falls X oder Y stetig sind, dann gilt $[X,Y] = 0$.

Beweis.

(a) Siehe [JS03, Proposition I.4.49].

(b) Siehe [JS03, Proposition I.4.49].

(c) Folgt aus Teil (b) und Satz 6.2.9(b).

(d) Folgt aus (a) und (b).

□

Korollar 6.3.10 (Partielle Integration)**.** *Es seien $X, Y \in \mathscr{S}$ mit C^1-Pfaden. Dann gilt*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s \dot{Y}_s \, ds + \int_0^t \dot{X}_s Y_s \, ds, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Beweis. Übung. □

Satz 6.3.11. *Es seien $M, N \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ zwei lokale Martingale.*

(a) Es gilt $MN - M_0 N_0 - [M, N] \in \mathscr{L}$.

(b) Falls $M, N \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$, dann gilt $[M, N] \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ und $[M, N]^p = \langle M, N \rangle$.

(c) Falls $M, N \in \mathscr{H}^2$, dann gilt $[M, N] \in \mathscr{A}$ und $MN - [M, N] \in \mathscr{M}$.

(d) Es gilt $M \in \mathscr{H}^2$ genau dann, wenn $[M, M] \in \mathscr{A}^+$ und $M_0 \in L^2$.

(e) Es gilt $M \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$ genau dann, wenn $[M, M] \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$ und $M_0 \in L^2$.

(f) Es gilt $M = M_0$ bis auf Ununterscheidbarkeit genau dann, wenn $[M, M] = 0$.

Beweis.

(a) Nach Definiton 6.3.1 und Satz 6.2.9(b) gilt

$$MN - M_0 N_0 - [M, N] = M_- \cdot N + N_- \cdot M \in \mathscr{L}.$$

(b) Wegen der Polarisierungsformel aus Lemma 6.3.4 dürfen wir annehmen, dass $M = N$. Nach Teil (a) und Satz 5.1.2 gilt

$$M^2 - M_0^2 - [M, M] \in \mathscr{L} \quad \text{und} \quad M^2 - M_0^2 - \langle M, M \rangle \in \mathscr{L}.$$

Nach den Sätzen 6.3.6 und 4.2.13 folgt

$$[M, M] - \langle M, M \rangle \in \mathscr{L} \cap \mathscr{V} \subset \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}.$$

Da $\langle M, M \rangle$ previsibel ist, gilt nach Satz 4.2.12, dass $\langle M, M \rangle \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$. Es folgt $[M, M] \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$, und somit erhalten wir $[M, M]^p = \langle M, M \rangle$.

(c) Wegen der Polarisierungsformel aus Lemma 6.3.4 dürfen wir annehmen, dass $M = N$. Es gilt $[M, M] - \langle M, M\rangle \in \mathscr{L} \cap \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ und $[M, M] \in \mathscr{V}^+$. Außerdem gilt nach Satz 5.1.2, dass $\langle M, M\rangle \in \mathscr{A}^+$. Es sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge, so dass $([M, M] - \langle M, M\rangle)^{T_n} \in \mathscr{M}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Stoppsatz von Doob (Satz 2.3.23) gilt

$$\mathbb{E}[[M, M]_{T_n} - \langle M, M\rangle_{T_n}] = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und nach dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt

$$\mathbb{E}[[M, M]_\infty] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[[M, M]_{T_n}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_{T_n}] = \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty] < \infty,$$

und somit $[M, M] \in \mathscr{A}^+$. Nach Satz 4.2.10 gehört das lokale Martingal $[M, M]- \langle M, M\rangle$ zur Klasse (D). Also folgt mit Satz 2.4.9, dass $[M, M] - \langle M, M\rangle \in \mathscr{M}$. Weiterhin gilt nach Satz 5.1.2, dass $M^2 - \langle M, M\rangle \in \mathscr{M}$, und wir erhalten

$$M^2 - [M, M] = \big(M^2 - \langle M, M\rangle\big) - \big([M, M] - \langle M, M\rangle\big) \in \mathscr{M}.$$

(d) Es gelte $[M, M] \in \mathscr{A}^+$ und $M_0 \in L^2$. Es sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge für das lokale Martingal $M^2 - M_0^2 - [M, M]$. Nach dem Stoppsatz von Doob (Satz 2.3.23) gilt für jede Stoppzeit T und jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}[M^2_{T\wedge T_n} - M_0^2 - [M, M]_{T\wedge T_n}] = 0.$$

Nach dem Lemma von Fatou und dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt für jedes $t \in \mathbb{R}_+$, dass

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_t^2] &= \mathbb{E}\big[\lim_{n\to\infty} M^2_{t\wedge T_n}\big] \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\big[M^2_{t\wedge T_n}\big] \\ &= \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\big[M_0^2 + [M, M]_{t\wedge T_n}\big] \le \mathbb{E}[M_0^2] + \mathbb{E}[[M, M]_\infty] < \infty.\end{aligned}$$

Also gilt nach Korollar 2.2.6, dass $M \in \mathscr{M}$. Analog erhalten wir

$$\mathbb{E}[M_\infty^2] \le \mathbb{E}[M_0^2] + \mathbb{E}[[M, M]_\infty] < \infty,$$

und somit $M \in \mathscr{H}^2$.

(e) Folgt per Lokalisierung aus Teil (d).

(f) Es gelte $[M, M] = 0$. Nach Teil (a) gilt $M^2 \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$, und somit gilt $M \perp M$. Nach Satz 5.2.3 folgt $M = M_0$ bis auf Ununterscheidbarkeit.

$\square$

Korollar 6.3.12. *Für alle $M, N \in \mathscr{H}^2$ gilt*

$$\langle M, N \rangle_{\mathscr{H}^2} = \mathbb{E}[M_0 N_0] + \mathbb{E}[[M, N]_\infty].$$

Beweis. Nach Satz 6.3.11(c) gilt $MN - [M, N] \in \mathscr{M}$, und nach Satz 5.1.7 gilt $MN - \langle M, N \rangle \in \mathscr{M}$. Also gilt

$$\langle M, N \rangle - [M, N] = \big(MN - [M, N]\big) - \big(MN - \langle M, N \rangle\big) \in \mathscr{M}.$$

Also folgt mit dem Stoppsatz von Doob (Satz 2.3.23)

$$\mathbb{E}[\langle M, N \rangle_\infty - [M, N]_\infty] = \mathbb{E}[\langle M, N \rangle_0 - [M, N]_0] = 0,$$

und mit Satz 5.1.10 erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle M, N \rangle_{\mathscr{H}^2} &= \mathbb{E}[M_0 N_0] + \mathbb{E}[\langle M, N \rangle_\infty] \\ &= \mathbb{E}[M_0 N_0] + \mathbb{E}[[M, N]_\infty] + \mathbb{E}[\langle M, N \rangle_\infty - [M, N]_\infty] \\ &= \mathbb{E}[M_0 N_0] + \mathbb{E}[[M, N]_\infty]. \end{aligned}$$

□

Satz 6.3.13. *Es sei H ein optionaler Prozess mit $H_0 = 0$, ${}^p H = 0$ und $\sum_{s \le \bullet} H_s^2 \in \mathscr{A}^+$.*

(a) Es existiert ein rein unstetiges Martingal $Y \in \mathscr{H}_0^{2,d}$, so dass $\Delta Y = H$ bis auf Ununterscheidbarkeit.

(b) Es existiert eine Zerlegung $Y = Y^q + Y^a$ mit rein unstetigen $Y^q, Y^a \in \mathscr{H}_0^{2,d}$, so dass Y^q quasi-linksstetig ist, und $\Delta Y_T^a = 0$ fast sicher auf $\{T < \infty\}$ für jede orthogonale Stoppzeit T.

(c) Es gilt $[Y, Y] = \sum_{s \le \bullet} H_s^2$.

Beweis.

(a) Nach Satz 3.3.14 existieren eine Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von orthogonalen Stoppzeiten und eine Folge $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von previsiblen Zeiten, so dass die Vereinigung dieser beiden Folgen ausschöpfend ist, und

$$\{H \neq 0\} \subset \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\![S_n]\!] \Big) \cup \Big(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} [\![T_m]\!] \Big).$$

Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir setzen

$$A^n := H_{S_n} \mathbb{1}_{[\![S_n, \infty [\![} \in \mathscr{A} \quad \text{und} \quad M^n := A^n - A^{n,p} \in \mathscr{M}.$$

Es sei T eine previsible Zeit. Da S_n orthogonal ist, gilt $\mathbb{P}(S_n = T < \infty) = 0$, und somit fast sicher

$$(H_{S_n} \mathbb{1}_{[\![S_n]\!]})_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} = H_{S_n} \mathbb{1}_{\{S_n = T < \infty\}} = 0.$$

Mit Lemma 4.5.8(d) folgt

$$\Delta A^{n,p} = {}^p(\Delta A^n) = {}^p(H_{S_n} \mathbb{1}_{[\![S_n]\!]}) = 0.$$

Also gilt $\Delta M^n = \Delta A^n$. Nun setzen wir

$$N^n := H_{T_n} \mathbb{1}_{[\![T_n, \infty[\![}.$$

Es sei T eine beliebige Stoppzeit. Nach Lemma 1.3.10 gilt

$$\{T_n < \infty\} \cap \{T_n \le T\} = \{T_n < \infty\} \cap (\Omega \setminus \{T < T_n\}) \in \mathscr{F}_{T_n-}.$$

Wegen ${}^pH = 0$ folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_T^n] &= \mathbb{E}[H_{T_n} \mathbb{1}_{\{T_n<\infty\} \cap \{T_n \le T\}}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[H_{T_n} \mid \mathscr{F}_{T_n-}] \mathbb{1}_{\{T_n<\infty\} \cap \{T_n \le T\}}] \\ &= \mathbb{E}[({}^pH)_{T_n} \mathbb{1}_{\{T_n<\infty\} \cap \{T_n \le T\}}] = 0, \end{aligned}$$

Nach dem Stoppsatz von Doob (Satz 2.3.23) folgt $N^n \in \mathscr{M}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

$$B_n := \bigcup_{m=1}^n [\![S_m]\!], \quad C_n := \bigcup_{m=1}^n [\![T_m]\!]$$

und

$$Y^{q,n} := \sum_{m=1}^n M^m, \quad Y^{a,n} := \sum_{m=1}^n N^m.$$

Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt $Y^{q,n}, Y^{a,n} \in \mathscr{L} \cap \mathscr{V}$, und nach Satz 5.2.7(b) sind $Y^{q,n}$ und $Y^{a,n}$ rein unstetig. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \Delta Y^{q,n} &= \sum_{m=1}^n \Delta M^m = \sum_{m=1}^n \Delta A^m = H \mathbb{1}_{B_n}, \\ \Delta Y^{a,n} &= \sum_{m=1}^n \Delta N^m = H \mathbb{1}_{C_n}. \end{aligned}$$

Nach Satz 6.3.9(a) und Lemma 6.3.8 gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \le n$

$$\begin{aligned} [Y^{q,n} - Y^{q,k}, Y^{q,n} - Y^{q,k}] &= \Delta(Y^{q,n} - Y^{q,k}) \cdot (Y^{q,n} - Y^{q,k}) = \sum_{s \le \bullet} \Delta(Y^{q,n} - Y^{q,k})^2 \\ &= \sum_{s \le \bullet} H_s^2 \mathbb{1}_{B_n \setminus B_k}(s) \in \mathscr{A}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$[Y^{q,n}, Y^{q,n}] = \sum_{s \le \bullet} H_s^2 \mathbb{1}_{B_n}(s) \in \mathscr{A},$$

und nach Satz 6.3.11(d) folgt $Y^{q,n} \in \mathscr{H}_0^2$. Nun folgt mit Korollar 5.2.12, dass $Y^{q,n} \in \mathscr{H}_0^{2,d}$. Außerdem gilt nach Korollar 6.3.12

$$\|Y^{q,n} - Y^{q,k}\|_{\mathscr{H}^2}^2 = \mathbb{E}\big[[Y^{q,n} - Y^{q,k}, Y^{q,n} - Y^{q,k}]_\infty\big] = \mathbb{E}\Bigg[\sum_{s \ge 0} H_s^2 \mathbb{1}_{B_n \setminus B_k}(s)\Bigg] \to 0$$

für $n, k \to \infty$, da $\sum_{s \le \bullet} H_s^2 \in \mathscr{A}$. Also existiert ein $Y^q \in \mathscr{H}_0^{2,d}$ mit $Y^{q,n} \to Y^q$ in $\mathscr{H}^2$. Insbesondere gilt $\Delta Y^{q,n} \to \Delta Y^q$. Analog zeigen wir, dass ein $Y^a \in \mathscr{H}_0^{2,d}$ mit $Y^{a,n} \to Y^a$ in $\mathscr{H}^2$ und $\Delta Y^{a,n} \to \Delta Y^a$ existiert. Wir setzen $Y := Y^q + Y^a \in \mathscr{H}_0^{2,d}$, und da $\{H \neq 0\} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n \cup C_n)$, folgt $\Delta Y = H$ bis auf Ununterscheidbarkeit.

(b) Nach der Konstruktion aus Teil (a) gilt

$$\{\Delta Y^q \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\![S_n]\!] \quad \text{und} \quad \{\Delta Y^a \neq 0\} \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} [\![T_m]\!].$$

Nach Satz 3.3.20 folgt, dass Y^q quasi-linksstetig ist, und nach Satz 3.3.15 folgt, dass $\Delta Y_T^a = 0$ fast sicher auf $\{T < \infty\}$ für jede orthogonale Stoppzeit T.

(c) Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir setzen $Y^n := Y^{q,n} + Y^{a,n}$. Nach dem Beweis von Teil (a) gilt

$$[Y^n, Y^n] = \sum_{s \le \bullet} H_s^2 \mathbb{1}_{B_n \cup C_s}(s).$$

Also folgt für $n \to \infty$, dass $[Y, Y] = \sum_{s \le \bullet} H_s^2 \in \mathscr{M}$.

□

Satz 6.3.14. *Es sei $M \in \mathscr{H}_0^{2,d}$ ein rein unstetiges Martingal.*

(a) Es existiert eine Zerlegung $M = M^q + M^a$ mit rein unstetigen $M^q, M^a \in \mathscr{H}_0^{2,d}$, so dass M^q quasi-linksstetig ist, und $\Delta M_T^a = 0$ fast sicher auf $\{T < \infty\}$ für jede orthogonale Stoppzeit T.

(b) Es gilt $[M, M] = \sum_{s \le \bullet} (\Delta M_s)^2$.

Beweis. Wir setzen $H := \Delta M$. Dann gilt $H_0 = 0$, und H ist nach Korollar 1.4.9 ein optionaler Prozess. Weiterhin gilt nach Satz 6.3.6(d) und Satz 6.3.11(d)

$$\sum_{s \le \bullet} H_s^2 = \sum_{s \le \bullet} (\Delta M_s)^2 = \sum_{s \le \bullet} \Delta [M,M]_s \le [M,M] \in \mathscr{A}^+.$$

Nach Satz 3.4.7(a) gilt außerdem ${}^pH = 0$. Also existiert nach Satz 6.3.13 ein $Y \in \mathscr{H}_0^{2,d}$, so dass $\Delta Y = H = \Delta M$. Nach Korollar 5.2.4 gilt $M = Y$ bis auf Ununterscheidbarkeit, und die Teile (a) und (b) folgen. □

Lemma 6.3.15. *Es sei $A \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$, so dass $\Delta A_T = 0$ fast sicher auf $\{T < \infty\}$ für jede orthogonale Stoppzeit T. Dann ist der previsible Kompensator A^p rein unstetig im Sinne von Definition 4.1.3.*

Beweis. Siehe [HWY92, Thm. 7.14]. □

Satz 6.3.16. *Es sei $M \in \mathscr{L} \cap \mathscr{V}$ beliebig. Dann gilt $M^q, M^a \in \mathscr{L} \cap \mathscr{V}$, wobei $M = M^q + M^a$ die Zerlegung aus Satz 4.2.15 bezeichnet.*

Beweis. Es gilt $(M^q)^p + (M^a)^p = M^p = 0$, da $M \in \mathscr{L}$. Nach Satz 4.5.9 ist $(M^q)^p$ stetig, und nach Lemma 6.3.15 ist $(M^a)^p$ rein unstetig. Also ist $(M^q)^p = -(M^a)^p$ sowohl stetig als auch rein unstetig, und es folgt $(M^q)^p = 0$ und $(M^a)^p = 0$. Daraus folgt $M^q, M^a \in \mathscr{L}$. □

Lemma 6.3.17. *Es sei X ein quasi-linksstetiger Prozess, so dass $\Delta X_T = 0$ fast sicher auf $\{T < \infty\}$ für jede orthogonale Stoppzeit T. Dann ist X stetig bis auf eine vernachlässigbare Menge.*

Beweis. Es existieren eine ausschöpfende Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von orthogonalen Stoppzeiten und eine ausschöpfend Folge $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von previsiblen Zeiten, so dass

$$\{\Delta X \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\![S_n]\!] = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} [\![T_m]\!].$$

Nach Bemerkung 3.3.5 gilt bis auf eine vernachlässigbare Menge $[\![S_n]\!] \cap [\![T_m]\!] = \emptyset$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Also gilt $\{\Delta X \neq 0\} = \emptyset$ bis auf eine vernachlässigbare Menge. □

Satz 6.3.18. *Zu jedem rein unstetigen lokalen Martingal $M \in \mathscr{L}$ existiert eine bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig bestimmte Zerlegung $M = M^q + M^a$ mit rein unstetigen $M^q, M^a \in \mathscr{L}$, so dass M^q quasi-linksstetig ist, und $\Delta M^a_T = 0$ fast sicher auf $\{T < \infty\}$ für jede orthogonale Stoppzeit T.*

Beweis. Existenz: Nach Satz 5.2.13 existieren ein rein unstetiges lokales Martingal $M' \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{V}$ und $M'' \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$, so dass

$$M = M' + M''$$

und $M'_0 = M''_0 = 0$. Da M und M' rein unstetig sind, ist auch M'' rein unstetig. Durch Lokalisierung dürfen wir annehmen, dass $M'' \in \mathscr{H}_0^{2,d}$. Nach den Sätzen 6.3.14 und 6.3.16 existieren Zerlegungen

$$M' = (M')^q + (M')^a \quad \text{und} \quad M'' = (M'')^q + (M'')^a$$

mit rein unstetigen lokalen Martingalen $(M')^q, (M')^a, (M'')^q, (M'')^a \in \mathscr{L}$, so dass $(M')^q$ und $(M'')^q$ quasi-linksstetig sind, und $\Delta(M')^a_T = \Delta(M'')^a_T = 0$ fast sicher auf $\{T < \infty\}$ für jede orthogonale Stoppzeit T. Also ist die gewünschte Zerlegung $M = M^q + M^a$ gegeben durch $M^q = (M')^q + (M'')^q$ und $M^a = (M')^a + (M'')^a$.

Eindeutigkeit: Seien $M = M^q + M^a$ und $M = N^q + N^a$ zwei derartige Zerlegungen. Dann ist $N := M^q - N^q = N^a - M^a \in \mathscr{L}$ ein rein unstetiges lokales Martingal, das quasi-linksstetig, und es gilt $\Delta N^a_T = 0$ fast sicher auf $\{T < \infty\}$ für jede orthogonale Stoppzeit T. Nach Lemma 6.3.17 folgt, dass N stetig ist. Nun folgt mit Satz 5.2.3(b), dass $N = 0$; das heißt $M^q = N^q$ und $M^a = N^a$ bis auf Ununterscheidbarkeit. □

Beispiel 6.3.19. *Es sei N ein verallgemeinerter Poisson-Prozess mit Intensität a. Dann ist die Zerlegung von $N - a$ gegeben durch*

$$N = (N^q - a^c) + (N^a - a^d),$$

wobei wir die Notation von Satz 4.5.17 benutzen.

Informelle Bemerkung: Es sei $X : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine càdlàg-Funktion.

(a) Es gibt eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$, so dass

$$\{\Delta X \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![t_n]\!].$$

(b) Es gilt $\Delta X_T = 0$ fast sicher auf $\{T < \infty\}$ für jede orthogonale Stoppzeit T.

(c) Die Funktion X ist genau dann stetig, wenn sie quasi-linksstetig ist.

Satz 6.3.20. *Für alle $X, Y \in \mathscr{S}$ gilt*

$$[X,Y] = \langle X^c, Y^c\rangle + \sum_{s\leq\bullet} \Delta X_s \Delta Y_s.$$

Beweis. Wegen der Polarisierungsformel aus Lemma 6.3.4 dürfen wir annehmen, dass $X = Y$. Nach Satz 6.1.16 existiert eine Zerlegung

$$X = X_0 + X^c + M + A$$

mit einem rein unstetigen lokalen Martingal $M \in \mathscr{H}^2_{\text{loc}}$ und $A \in \mathscr{V}$. Durch Lokalisierung dürfen wir annehmen, dass $X^c \in \mathscr{H}^{2,c}$ und $M \in \mathscr{H}^{2,d}$. Dann gilt

$$[X,X] = [X^c,X^c] + 2[X^c,M] + 2[X^c,A] + [M,M] + 2[M,A] + [A,A].$$

Der Prozess $[X^c,X^c]$ ist nach Satz 6.3.6(d) stetig (also insbesondere previsibel), und somit folgt nach Satz 6.3.11(b), dass

$$[X^c,X^c] = [X^c,X^c]^p = \langle X^c,X^c\rangle.$$

Nach Satz 6.3.14(b) gilt

$$[M,M] = \sum_{s\leq\bullet}(\Delta M_s)^2.$$

Nach Satz 6.3.9(a) und Lemma 6.3.8 gilt

$$[A,A] = \Delta A \cdot A = \sum_{s\leq\bullet}(\Delta A_s)^2,$$
$$[M,A] = \Delta M \cdot A = \sum_{s\leq\bullet}\Delta M_s \Delta A_s.$$

Also folgt

$$[M,M] + 2[M,A] + [A,A] = \sum_{s\leq\bullet}(\Delta X_s)^2.$$

Nach Satz 6.3.9(d) gilt

$$[X^c,A] = 0.$$

Es gilt $X^c \perp M$, und somit $\langle X^c,M\rangle = 0$ nach Satz 5.2.11. Der Prozess $[X^c,M]$ ist nach Satz 6.3.6(d) stetig (also insbesondere previsibel), und somit folgt nach Satz 6.3.11(b), dass

$$[X^c,M] = [X^c,M]^p = \langle X^c,M\rangle = 0.$$

Insgesamt erhalten wir

$$[X,X] = \langle X^c,X^c\rangle + \sum_{s\leq\bullet}(\Delta X_s)^2.$$

□

Satz 6.3.21. *Es seien $X, Y \in \mathscr{S}$ zwei Semimartingale.*

(a) *Es gilt*

$$XY = X_0 Y_0 + X_- \circ Y + Y_- \circ X + \sum_{s \le \bullet} \Delta X_s \Delta Y_s.$$

(b) *Ist eines der beiden Semimartingale X und Y stetig, so gilt*

$$XY = X_0 Y_0 + X_- \circ Y + Y_- \circ X.$$

Beweis. Übung. □

Lemma 6.3.22. *Es sei $s \in \mathbb{R}_+$. Für ein lokales Martingal $M \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$ mit $M_t = 0$ für alle $t \in [0, s]$ und eine $\mathscr{F}_s$-messbare Zufallsvariable Y gilt $YM \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$.*

Beweis. Verläuft wie der Beweis von Lemma 5.2.5. □

Lemma 6.3.23. *Es seien $M \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$ und H ein lokal beschränkter, previsibler Prozess.*

(a) *Falls M stetig ist, dann ist auch $H \cdot M$ stetig.*

(b) *Falls M rein unstetig ist, dann ist auch $H \cdot M$ rein unstetig.*

Beweis.

(a) Folgt, da $\Delta(H \cdot M) = H \Delta M$ nach Satz 6.2.9(f).

(b) Beweis für elementare Integranden: Es sei $H = Y \mathbb{1}_{(r,s]}$ mit $0 \le r < s$ und einer $\mathscr{F}_r$-messbaren Zufallsvariablen Y. Es sei $N \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$ ein stetiges lokales Martingal. Dann gilt $M \perp N$, und mit Satz 5.2.3(c) gilt $M^s - M^r \perp N$, das heißt $(M^s - M^r)N \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$. Mit Lemma 6.3.22 folgt nun

$$(H \cdot M)N = Y(M^s - M^r)N \in \mathscr{M}_{\text{loc}}.$$

□

Lemma 6.3.24. *Für $X \in \mathscr{S}$ und einen lokal beschränkten, previsiblen Prozess H gilt $(H \cdot X)^c = H \cdot X^c$.*

Beweis. Es sei $X = X_0 + M + A$ eine Semimartingal-Zerlegung von X. Dann ist

$$H \cdot X = H \cdot M^c + H \cdot M^d + H \cdot A$$

eine Semimartingal-Zerlegung von $H \cdot X$. Nach Lemma 6.3.23 ist $H \cdot M^c \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$ stetig und $H \cdot M^d \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$ rein unstetig. Außerdem gilt $H \cdot A \in \mathscr{V}$. □

Satz 6.3.25. *Es seien $X, Y \in \mathscr{S}$ und H, K lokal beschränkte, previsible Prozesse. Dann gilt*

$$[H \cdot X, K \cdot Y] = (HK) \cdot [X, Y].$$

Beweis. Nach den Sätzen 6.3.20, 6.2.9(f) und 6.2.16(c) sowie Lemma 6.3.24 gilt

$$\begin{aligned}[H \cdot X, K \cdot Y] &= \langle (H \cdot X)^c, (K \cdot Y)^c \rangle + \sum_{s \leq \bullet} \Delta(H \cdot X)_s \Delta(K \cdot Y)_s \\ &= \langle H \cdot X^c, K \cdot Y^c \rangle + \sum_{s \leq \bullet} H_s \Delta X_s K_s \Delta Y_s \\ &= (HK) \cdot \langle X^c, Y^c \rangle + \sum_{s \leq \bullet} (H_s K_s) \Delta X_s \Delta Y_s \\ &= (HK) \cdot \left(\langle X^c, Y^c \rangle + \sum_{s \leq \bullet} \Delta X_s \Delta Y_s \right) = (HK) \cdot [X, Y].\end{aligned}$$

□

Satz 6.3.26. *Es sei H ein optionaler Prozess mit $H_0 = 0$.*

(a) Es existiert ein $M \in \mathscr{H}^2$ mit $\Delta M = H$ bis auf Ununterscheidbarkeit genau dann, wenn ${}^pH = 0$ und $\sum_{s \leq \bullet} H_s^2 \in \mathscr{A}^+$.

(b) Es existiert ein $M \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$ mit $\Delta M = H$ bis auf Ununterscheidbarkeit genau dann, wenn ${}^pH = 0$ und $\sum_{s \leq \bullet} H_s^2 \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$.

(c) Es existiert ein $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{A}$ mit $\Delta M = H$ bis auf Ununterscheidbarkeit genau dann, wenn ${}^pH = 0$ und $\sum_{s \leq \bullet} |H_s| \in \mathscr{A}^+$.

(d) Es existiert ein $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}} \cap \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ mit $\Delta M = H$ bis auf Ununterscheidbarkeit genau dann, wenn ${}^pH = 0$ und $\sum_{s \leq \bullet} |H_s| \in \mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}$.

(e) Es existiert ein $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ mit $\Delta M = H$ bis auf Ununterscheidbarkeit genau dann, wenn ${}^pH = 0$ und $[\sum_{s \leq \bullet} H_s^2]^{1/2} \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$.

Beweis. Siehe [JS03, Thm. I.4.56]. □

6.4 Die Itô-Formel

Für $f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ definieren wir $\hat{f} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ durch

$$\hat{f}(x, y) := f(x) - f(y) - \sum_{i=1}^d \partial_i f(y)(x^i - y^i).$$

Satz 6.4.1 (Itô-Formel)**.** *Es seien $X \in \mathscr{S}^d$ und $f \in C^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$. Dann gilt*

$$f(X) = f(X_0) + \sum_{i=1}^{d} \partial_i f(X_-) \cdot X^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{ij} f(X_-) \cdot \langle X^{i,c}, X^{j,c} \rangle + \sum_{s \le \bullet} \hat{f}(X_s, X_{s-}),$$

wobei

$$\sum_{s \le \bullet} \hat{f}(X_s, X_{s-}) = \sum_{s \le \bullet} \left[f(X_s) - f(X_{s-}) - \sum_{i=1}^{d} \partial_i f(X_{s-}) \Delta X_s^i \right] \in \mathscr{V}.$$

Beweis. Siehe [JS03, Thm. I.4.57]. □

Beispiel 6.4.2. *Es sei $X \in \mathscr{V}$ stetig, und es sei $f \in C^2(\mathbb{R})$. Dann gilt nach der Itô-Formel (Satz 6.4.1)*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Falls X Pfade aus C^1 hat, dafür aber nur $f \in C^1(\mathbb{R})$ gilt, so folgt dies aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Kettenregel

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t \frac{d}{ds} f(X_s) ds = f(X_0) + \int_0^t Df(X_s) \dot{X}_s ds \\ &= f(X_0) + \int_0^t Df(X_s) dX_s, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Beispiel 6.4.3. *Für $X, Y \in \mathscr{S}$ gilt $XY = X_0 Y_0 + Y_- \cdot X + X_- \cdot Y + [X,Y]$. Dies folgt aus Definition 6.3.1. Wir erhalten einen alternativen Beweis mit der Itô-Formel. Für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$ gilt $f \in C^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ mit*

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= y, \\ \partial_y f(x,y) &= x, \\ \partial_{xy} f(x,y) &= \partial_{yx} f(x,y) = 1, \\ \partial_{xx} f(x,y) &= \partial_{yy} f(x,y) = 0. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} & f(X,Y) - f(X_-, Y_-) - \partial_x f(X_-, Y_-) \Delta X - \partial_y f(X_-, Y_-) \Delta Y \\ &= XY - X_- Y_- - Y_- \Delta X - X_- \Delta Y \\ &= \underbrace{XY - X_- Y}_{= \Delta X Y} + \underbrace{X_- Y - X_- Y_-}_{= X_- \Delta Y} - Y_- \Delta X - X_- \Delta Y \\ &= \Delta X Y - Y_- \Delta X = \Delta X \Delta Y. \end{aligned}$$

Mit der Itô-Formel (Satz 6.4.1) und Satz 6.3.20 folgt

$$\begin{aligned} XY &= X_0Y_0 + Y_- \cdot X + X_- \cdot Y + \langle X^c, Y^c \rangle + \sum_{s \leq \bullet} \Delta X_s \Delta Y_s \\ &= X_0Y_0 + Y_- \cdot X + X_- \cdot Y + [X,Y]. \end{aligned}$$

Beispiel 6.4.4. *Es seien $W^1, \dots, W^m$ Standard-Wiener-Prozesse. Es sei X_0 eine $\mathscr{F}_0$-messbare $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable, es sei b ein $\mathbb{R}^d$-wertiger optionaler Prozess, so dass $\int_0^t |b_s^i| ds < \infty$ für $i = 1, \dots, d$, und es sei σ ein $\mathbb{R}^{d \times m}$-wertiger previsibler Prozess, so dass $\sigma^{ik} \in L^2_{\text{loc}}(W^k)$ für $i = 1, \dots, d$ und $k = 1, \dots, m$. Weiterhin sei $X \in \mathscr{S}^d$ für $i = 1, \dots, d$ gegeben durch*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b_s^i ds + \sum_{k=1}^m \int_0^t \sigma_s^{ik} dW_s^k, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Nun sei $f \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(X_t) = f(X_0) &+ \sum_{i=1}^d \int_0^t \left(\partial_i f(X_{s-}) b_s^i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \partial_{ij} f(X_{s-}) (\sigma_s \sigma_s^\top)^{ij} \right) ds \\ &+ \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^m \int_0^t \partial_i f(X_{s-}) \sigma_s^{ik} dW_s^k, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Beweis. Nach der Itô-Formel (Satz 6.4.1) gilt

$$\begin{aligned} f(X_t) = f(X_0) &+ \sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_i f(X_{s-}) b_s^i ds + \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^m \int_0^t \partial_i f(X_{s-}) \sigma_s^{ik} dW_s^k \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sum_{k=1}^m \int_0^t \partial_{ij} f(X_{s-}) \sigma^{ik} \sigma^{jk} ds, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

□

Satz 6.4.5. *Es seien $X \in \mathscr{S}^d$ und $f \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$.*

(a) Es gilt $f(X) \in \mathscr{S}$.

(b) Sind $X^i = X_0^i + M^i + A^i$, $i = 1, \dots, d$ Semimartingal-Zerlegungen der X^i, so ist eine Semimartingal-Zerlegung von $f(X)$ gegeben durch $f(X) = f(X_0) + N + B$, wobei

$$\begin{aligned} N &= \sum_{i=1}^d \partial_i f(X_-) \cdot M^i, \\ B &= \sum_{i=1}^d \partial_i f(X_-) \cdot A^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \partial_{ij} f(X_-) \cdot \langle X^{i,c}, X^{j,c} \rangle + \sum_{s \leq \bullet} \hat{f}(X_s, X_{s-}). \end{aligned}$$

(c) Falls $X \in (\mathscr{S}_p)^d$, so sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es gilt $f(X) \in \mathscr{S}_p$.

(ii) Es gilt $\sum_{s \le \bullet} \hat{f}(X_s, X_{s-}) \in \mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$.

Sind in diesem Fall $X^i = X_0^i + M^i + A^i$, $i = 1, \dots, d$ die kanonischen Zerlegungen der X^i, so ist die kanonosche Zerlegung von $f(X)$ gegeben durch $f(X) = f(X_0) + N + B$, wobei

$$N = \sum_{i=1}^{d} \partial_i f(X_-) \cdot M^i + \sum_{s \le \bullet} \hat{f}(X_s, X_{s-}) - \left(\sum_{s \le \bullet} \hat{f}(X_s, X_{s-}) \right)^p,$$

$$B = \sum_{i=1}^{d} \partial_i f(X_-) \cdot A^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{ij} f(X_-) \cdot \langle X^{i,c}, X^{j,c} \rangle + \left(\sum_{s \le \bullet} \hat{f}(X_s, X_{s-}) \right)^p.$$

Beweis.

(a), (b) Nach der Itô-Formel (Satz 6.4.1) gilt $f(X) = f(X_0) + N + B$. Nach Satz 6.2.9 gilt außerdem $N \in \mathscr{L}$ und $B \in \mathscr{V}$, so dass $f(X) \in \mathscr{S}$ folgt.

(c) Die Aq̈uivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (ii) folgt aus Teil (b) und Satz 6.1.9. Diese beiden äquivalenten Aussagen seien nun erfüllt. Für $i = 1, \dots, d$ sind $\partial_i f(X_-)$ und A^i previsibel, und für $i, j = 1, \dots, d$ sind $\partial_{ij} f(X_-)$ und $\langle X^{i,c}, X^{j,c} \rangle$ previsibel. Also folgt mit Satz 4.4.7(d), dass B previsibel ist, und folglich ist $f(X) = f(X_0) + N + B$ die kanonische Zerlegung von $f(X)$.

□

Satz 6.4.6. *Es seien $X \in \mathscr{S}$ ein Semimartingal und $f \in C^3(\mathbb{R})$. Dann gilt*

$$f(X) = f(X_0) + f'(X_-) \circ X^i + \sum_{s \le \bullet} \hat{f}(X_s, X_{s-}),$$

wobei hier

$$\sum_{s \le \bullet} \hat{f}(X_s, X_{s-}) = \sum_{s \le \bullet} \left[f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-}) \Delta X_s \right] \in \mathscr{V}.$$

Beweis. Nach der Itô-Formel (Satz 6.4.1) gilt

$$f(X) = f(X_0) + f'(X_-) \cdot X + \frac{1}{2} f''(X_-) \cdot \langle X^c, X^c \rangle + \sum_{s \le \bullet} \hat{f}(X_s, X_{s-}).$$

Nach Satz 6.4.5 gilt $f'(X) \in \mathscr{S}$. Also genügt es, zu zeigen, dass

$$\langle f'(X)^c, X^c \rangle = f''(X_-) \cdot \langle X^c, X^c \rangle.$$

Nach der Itô-Formel (Satz 6.4.1) gilt

$$f'(X) = f'(X_0) + f''(X_-) \cdot X + \underbrace{\frac{1}{2} f'''(X_-) \cdot \langle X^c, X^c \rangle + \sum_{s \le \bullet} \hat{f}'(X_s, X_{s-})}_{\in \mathscr{V}}.$$

Also folgt mit Lemma 6.3.24 und Satz 6.2.16(c)

$$\langle f'(X)^c, X^c \rangle = \langle (f''(X_-) \cdot X)^c, X^c \rangle = \langle f''(X_-) \cdot X^c, X^c \rangle = f''(X_-) \cdot \langle X^c, X^c \rangle.$$

□

6.5 Das stochastische Exponential

Lemma 6.5.1. *Es sei $X \in \mathscr{S}$. Dann ist das Produkt*

$$\prod_{s \le \bullet} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}$$

fast sicher auf jedem kompakten Intervall absolut konvergent.

Beweis. Es sei $t \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Nach Satz 6.3.6(d) gilt fast sicher

$$\sum_{s \le t} |\Delta X_s|^2 = \sum_{s \le t} \Delta [X, X]_s \le [X, X]_t < \infty.$$

Außerdem hat für fast jedes $\omega \in \Omega$ die Menge

$$A_t(\omega) := \left\{ s \in [0, t] : |\Delta X_s(\omega)| > \frac{1}{2} \right\}$$

nur endlich viele Elemente. Nach dem Satz von Taylor existiert eine Konstante $C > 0$, so dass

$$|\ln(1 + x) - x| \le C |x|^2 \quad \text{für alle } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right],$$

Also ist

$$\sum_{s \in [0,t] \setminus A_t} |\ln(1 + \Delta X_s) - \Delta X_s| \le C \sum_{s \le t} |\Delta X_s|^2$$

fast sicher absolut konvergent, und folglich ist

$$\prod_{s\in A_t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s}\cdot\exp\Bigg(\sum_{s\in[0,t]\setminus A_t}(\ln(1+\Delta X_s)-\Delta X_s)\Bigg)=\prod_{s\leq t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s}$$

fast sicher absolut konvergent. □

Definition 6.5.2. *Für $X\in\mathscr{S}$ definieren wir das stochastische Exponential*

$$\mathcal{E}(X):=\exp\left(X-X_0-\frac{1}{2}\langle X^c,X^c\rangle\right)\cdot\prod_{s\leq\bullet}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s}.$$

Bemerkung 6.5.3. *Gilt $X\in\mathscr{V}$ und ist X stetig, dann gilt $\mathcal{E}(X)=e^X$.*

Satz 6.5.4. *Es sei $X\in\mathscr{S}$. Dann besitzt die stochastische Differentialgleichung*

$$Y=1+Y_-\cdot X$$

eine bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig bestimmte Lösung $Y\in\mathscr{S}$; sie ist gegeben durch $Y=\mathcal{E}(X)$.

Beweis. Existenz: Es sei $Y:=\mathcal{E}(X)$. Wir definieren die Prozesse

$$\begin{aligned}V&:=\prod_{s\leq\bullet}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s},\\ Z&:=X-X_0-\frac{1}{2}\langle X^c,X^c\rangle.\end{aligned}$$

Dann gilt $V,Z\in\mathscr{S}$, der Prozess V hat Pfade von beschränkter Variation, und es gelten die Identitäten

$$\begin{aligned}Z^c&=X^c,\\ \Delta Z&=\Delta X,\\ Z+\frac{1}{2}\langle X^c,X^c\rangle&=X-X_0,\\ e^{Z_-}\cdot V&=\sum_{s\leq\bullet}e^{Z_{s-}}\Delta V_s\quad\text{(stochastisches Integral)}.\end{aligned}$$

Für die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(z,v):=ve^z$$

gilt $f \in C^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ mit

$$\begin{aligned}\partial_z f(z,v) &= f(z,v),\\ \partial_v f(z,v) &= e^z,\\ \partial_{zz} f(z,v) &= f(z,v),\end{aligned}$$

und es gilt $Y = f(Z,V)$. Da $V^c = 0$, folgt mit der Itô-Formel (Satz 6.4.1)

$$\begin{aligned}Y &= 1 + Y_- \cdot Z + e^{Z_-} \cdot V + \frac{1}{2} Y_- \cdot \langle Z^c, Z^c\rangle + \sum_{s\le \bullet} \big[Y_s - Y_{s-} - Y_{s-}\Delta Z_s - e^{Z_{s-}}\Delta V_s\big]\\ &= 1 + Y_- \cdot \left(Z + \frac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle\right) + \sum_{s\le\bullet} e^{Z_{s-}}\Delta V_s + \sum_{s\le\bullet}\big[\Delta Y_s - Y_{s-}\Delta X_s - e^{Z_{s-}}\Delta V_s\big]\\ &= 1 + Y_- \cdot X + \sum_{s\le\bullet}\big[\Delta Y_s - Y_{s-}\Delta X_s\big].\end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\Delta V = V - V_- = V_-(1+\Delta X)e^{-\Delta X} - V_- = V_-\big((1+\Delta X)e^{-\Delta X} - 1\big),$$

und wegen $\Delta Z = \Delta X$ folgt

$$\begin{aligned}\Delta Y = \Delta(Ve^Z) &= Ve^Z - V_- e^{Z_-} = (V - V_-)e^Z + V_-(e^Z - e^{Z_-})\\ &= V_-\big((1+\Delta X)e^{-\Delta X} - 1\big)e^Z + V_-(e^Z - e^{Z_-})\\ &= V_-\big((1+\Delta X)e^{-\Delta X}\big)e^Z - V_- e^{Z_-} = V_- e^{Z_-}\big(\big[e^{\Delta Z}(1+\Delta X)e^{-\Delta X}\big] - 1\big)\\ &= V_- e^{Z_-}\Delta X = Y_-\Delta X.\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$Y = 1 + Y_- \cdot X.$$

Eindeutigkeit: Siehe [JS03, Theorem I.4.61]. □

Beispiel 6.5.5. *Es seien W ein Standard-Wiener-Prozess und $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Dann hat die stochastische Differentialgleichung*

$$Y_t = 1 + \int_0^t \mu Y_{s-} ds + \int_0^t \sigma Y_{s-} dW_s, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

die eindeutig bestimmte Lösung

$$Y_t = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Lemma 6.5.6. *Es sei $X \in \mathscr{S}$.*

(a) *Es gilt $\mathcal{E}(X) \in \mathscr{S}$ mit $\mathcal{E}(X)_0 = 1$.*

(b) *Ist $X \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$, so gilt auch $\mathcal{E}(X) \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$.*

(c) *Gilt $X - X_0 \in \mathscr{V}$, so gilt auch $\mathcal{E}(X) - \mathcal{E}(X)_0 \in \mathscr{V}$.*

(d) *Es gilt $\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(X - X_0)$.*

Beweis. Folgt nach Definition 6.5.2 und den Sätzen 6.5.4 und 6.2.9. □

Lemma 6.5.7. *Es seien $X \in \mathscr{S}$ und $T := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : \Delta X_t = -1\}$.*

(a) *Es gilt $\mathcal{E}(X) \neq 0$ auf $[\![0, T[\![$.*

(b) *Es gilt $\mathcal{E}(X)_- \neq 0$ auf $[\![0, T]\!]$.*

(c) *Es gilt $\mathcal{E}(X) = 0$ auf $[\![T, \infty[\![$.*

(d) *Es gilt $\mathcal{E}(X), \mathcal{E}(X)_- \neq 0$ genau dann, wenn $\Delta X \neq -1$.*

(e) *Es gilt $\mathcal{E}(X), \mathcal{E}(X)_- > 0$ genau dann, wenn $\Delta X > -1$; und in diesem Fall gilt*

$$\mathcal{E}(X) = \exp\left(X - X_0 - \frac{1}{2}\langle X^c, X^c \rangle + \sum_{s \leq \bullet} (\ln(1 + \Delta X_s) - \Delta X_s) \right).$$

Beweis. Folgt aus Definition 6.5.2. □

Satz 6.5.8. *Für alle $X, Y \in \mathscr{S}$ gilt*

$$\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X + Y + [X, Y]).$$

Beweis. Für $U := \mathcal{E}(X)$ und $V := \mathcal{E}(Y)$ gilt nach Satz 6.5.4

$$U = 1 + U_- \cdot X \quad \text{und} \quad V = 1 + V_- \cdot Y,$$

und mit den Sätzen 6.2.9(h) und 6.3.25 folgt

$$\begin{aligned} UV &= 1 + U_- \cdot V + V_- \cdot U + [U, V] \\ &= 1 + U_- \cdot (V_- \cdot Y) + V_- \cdot (U_- \cdot X) + [U_- \cdot X, V_- \cdot Y] \\ &= 1 + (U_- V_-) \cdot Y + (V_- U_-) \cdot X + (U_- V_-) \cdot [X, Y] \\ &= 1 + (UV)_- \cdot \big(X + Y + [X, Y] \big). \end{aligned}$$

Also gilt wegen der Eindeutigkeitsaussage von Satz 6.5.4, dass

$$UV = \mathcal{E}(X + Y + [X, Y]).$$

□

6.6 Wiener-Prozesse

Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist die Fouriertransformierte $\mathscr{F}\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bekanntlich definiert durch

$$(\mathscr{F}\mu)(u) := \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \mu(dx).$$

Lemma 6.6.1. *Es seien X eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable, μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ eine Sub-σ-Algebra. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) X und $\mathscr{G}$ sind unabhängig, und es gilt $X \sim \mu$.

(ii) Es gilt

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \exp(iuX)] = \mathbb{P}(A)\,(\mathscr{F}\mu)(u) \quad \textit{für alle } A \in \mathscr{G} \textit{ und alle } u \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Übung. □

Satz 6.6.2 (Satz von Lévy). *Es sei W ein stetiges lokales Martingal mit $W_0 = 0$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) W ist ein Wiener-Prozess.

(ii) Es gibt eine stetige, monoton wachsende Funktion $\sigma^2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $\sigma_0^2 = 0$, so dass $\langle W, W \rangle = \sigma^2$.

In diesem Fall gelten folgende Aussagen:

(a) σ^2 die Varianzfunktion von W.

(b) Für alle $0 \le s \le t$ gilt $W_t - W_s \sim \mathrm{N}(0, \sigma_t^2 - \sigma_s^2)$.

Beweis. (i) ⇒ (ii) und (a): Folgt aus Satz 5.1.14.
(ii) ⇒ (i) und (b): Es sei $u \in \mathbb{R}$ beliebig. Der Prozess

$$Y = \mathcal{E}(iuW) = \exp\left(iuW + \frac{u^2\sigma^2}{2}\right)$$

ist ein $\mathbb{C}$-wertiges lokales Martingal. Es seien $0 \le s \le t$ und $A \in \mathscr{F}_s$ beliebig. Dann gilt

$$|Y^t| \le \exp\left(\frac{u^2\sigma_t^2}{2}\right).$$

Also ist Y^t beschränkt, und nach Korollar 2.4.10 gilt somit $Y^t \in \mathscr{M}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \exp(iu(W_t - W_s))] = \mathbb{E}\bigg[\mathbb{1}_A \frac{Y_t}{Y_s} \exp\Big(-\frac{u^2}{2}(\sigma_t^2 - \sigma_s^2)\Big)\bigg] \\
&= \mathbb{E}\bigg[\mathbb{1}_A \frac{1}{Y_s} \exp\Big(-\frac{u^2}{2}(\sigma_t^2 - \sigma_s^2)\Big) \underbrace{\mathbb{E}[Y_t \,|\, \mathscr{F}_s]}_{=Y_s}\bigg] = \mathbb{P}(A) \cdot \exp\Big(-\frac{u^2}{2}(\sigma_t^2 - \sigma_s^2)\Big) \\
&= \mathbb{P}(A) \cdot (\mathscr{F}\mathrm{N}(0, \sigma_t^2 - \sigma_s^2))(u).
\end{aligned}$$

Nach Lemma 6.6.1 sind $W_t - W_s$ und $\mathscr{F}_s$ unabhängig, und es gilt

$$W_t - W_s \sim \mathrm{N}(0, \sigma_t^2 - \sigma_s^2).$$

□

Korollar 6.6.3. *Ein Standard-Wiener-Prozess W ist ein PUSZ.*

Beweis. Folgt aus dem Satz von Lévy (Satz 6.6.2). □

6.7 Poisson-Prozesse

Für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße μ und ν auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist die Faltung $\mu * \nu$ bekanntlich definiert durch

$$(\mu * \nu)(B) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x+y) \mu(dx) \nu(dy), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Satz 6.7.1 (Satz von Poisson-Watanabe)**.** *Es sei N ein Punktprozess. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) N ist ein verallgemeinerter Poisson-Prozess.

(ii) Es gibt eine monoton wachsende càdlàg-Funktion $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $a_0 = 0$, so dass $N^p = a$.

In diesem Fall gelten folgende Aussagen:

(a) a ist die Intensität von N.

(b) Für alle $0 \leq s \leq t$ gilt

$$N_t - N_s \sim \mathrm{Pois}(a_t^c - a_s^c) \star \big(\bigstar_{s<r\leq t} \mathrm{Ber}(\Delta a_r)\big).$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) und (a): Folgt aus Satz 4.5.14(a).
(ii) $\Rightarrow$ (i) und (b): Es sei $u \in \mathbb{R}$ beliebig. Wegen $N_0 = 0$, $N \in \mathbb{N}_0$, $\Delta N \in \{0,1\}$ und eines Teleskopsummen-Arguments gilt

$$\begin{aligned}\exp(iuN) &= 1 + \sum_{s \leq \bullet} \big(\exp(iuN_s) - \exp(iuN_{s-}) \big) = 1 + \big(\exp(iuN) - \exp(iuN_-) \big) \cdot N \\ &= 1 + \big(\exp(iu\Delta N) - 1 \big) \exp(iuN_-) \cdot N = 1 + \big(\exp(iu) - 1 \big) \exp(iuN_-) \cdot N.\end{aligned}$$

Wir definieren den Prozess M durch

$$M := \exp(iuN) - 1 - \big(\exp(iu) - 1 \big) \exp(iuN_-) \cdot a.$$

Wegen $N^p = a$ gilt

$$M = \big(\exp(iu) - 1 \big) \exp(iuN_-) \cdot (N - N^p) \in \mathscr{M}_{\text{loc}}.$$

Es sei $t \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Dann gilt

$$|M^t| \leq 2(1 + a_t).$$

Also ist M^t beschränkt, und nach Korollar 2.4.10 gilt somit $M^t \in \mathscr{M}$. Es sei $s \leq t$ beliebig. Dann gilt

$$M_t - M_s = \exp(iuN_t) - \exp(iuN_s) - \big(\exp(iu) - 1 \big) \int_s^t \exp(iuN_{r-}) da_r,$$

und daher

$$\begin{aligned}&\exp(iu(N_t - N_s)) = \exp(iuN_t) \exp(-iuN_s) \\ &= \left(M_t - M_s + \exp(iuN_s) + \big(\exp(iu) - 1 \big) \int_s^t \exp(iuN_{r-}) da_r \right) \exp(-iuN_s) \\ &= 1 + \exp(-iuN_s)(M_t - M_s) + \big(\exp(iu) - 1 \big) \int_s^t \exp(iu(N_{r-} - N_s)) da_r.\end{aligned}$$

Nun sei $A \in \mathscr{F}_s$ mit $\mathbb{P}(A) > 0$ beliebig. Wir definieren die Funktion

$$f : [s,t] \to \mathbb{R}, \quad f_r := \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \exp(iu(N_t - N_r))]}{\mathbb{P}(A)}.$$

Da $M^t \in \mathscr{M}$, gilt

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \exp(-iuN_s)(M_t - M_s)] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \exp(-iuN_s) \mathbb{E}[M_t - M_s \,|\, \mathscr{F}_s]] = 0,$$

und daher

$$f_t = \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\,\mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_A \exp(-iuN_s)(M_t - M_s) + \mathbb{1}_A\big(\exp(iu)-1\big)\int_s^t \exp(iu(N_{r-}-N_s))da_r\Big]$$
$$= 1 + \big(\exp(iu)-1\big)\int_s^t \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \exp(iu(N_{r-}-N_s))]}{\mathbb{P}(A)}da_r$$
$$= 1 + \big(\exp(iu)-1\big)\int_s^t f_{r-}da_r.$$

Nach Satz 6.5.4 gilt $f_t = \mathcal{E}(a')_t$ für alle $t \geq s$, wobei $a'_t = (e^{iu}-1)[a_t - a_{t\wedge s}]$ für $t \in \mathbb{R}_+$. Also folgt für alle $t \geq s$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \exp(iu(N_t - N_s))] &= \mathbb{P}(A)\cdot f_t = \mathbb{P}(A)\cdot\mathcal{E}(a')_t = \mathbb{P}(A)\,\exp(a'_t)\prod_{s\leq t}(1+\Delta a'_s)\exp(-\Delta a'_s)\\ &= \mathbb{P}(A)\cdot\exp\big((a^c_t - a^c_s)(e^{iu}-1)\big)\prod_{s<r\leq t}\big(1+(e^{iu}-1)\Delta a_r\big)\\ &= \mathbb{P}(A)\cdot(\mathscr{F}\mathrm{Pois}(a^c_t - a^c_s))(u)\cdot\prod_{s<r\leq t}(\mathscr{F}\mathrm{Ber}(\Delta a_r))(u)\\ &= \mathbb{P}(A)\cdot\Big(\mathscr{F}\Big(\mathrm{Pois}(a^c_t - a^c_s)\star\big(\bigstar_{s<r\leq t}\mathrm{Ber}(\Delta a_r)\big)\Big)\Big)(u).\end{aligned}$$

Nach Lemma 6.6.1 sind $N_t - N_s$ und $\mathscr{F}_s$ unabhängig, und es gilt

$$N_t - N_s \sim \mathrm{Pois}(a^c_t - a^c_s)\star\big(\bigstar_{s<r\leq t}\mathrm{Ber}(\Delta a_r)\big).$$

□

Korollar 6.7.2. *Ein Standard-Poisson-Prozess N ist ein PUSZ.*

Beweis. Folgt aus dem Satz von Poisson-Watanabe (Satz 6.7.1). □

Korollar 6.7.3. *Es sei N ein verallgemeinerter Poisson-Prozess.*

(a) *Für alle $0 \leq s \leq t$ gilt*

$$N^q_t - N^q_s \sim \mathrm{Pois}(a^c_t - a^c_s).$$

(b) *Für alle $0 \leq s \leq t$ gilt*

$$N^a_t - N^a_s \sim \bigstar_{s<r\leq t}\mathrm{Ber}(\Delta a_r).$$

(c) *Es existiert eine Folge $(Y_s)_{s\in J}$ von unabhängigen Zufallsvariablen $Y_s \sim \mathrm{Ber}(\Delta a_s)$ für alle $s \in J$, so dass*

$$N^a = \sum_{\substack{s\leq\bullet\\ s\in J}} Y_s.$$

Hierbei bezeichnet $J = \{\Delta a > 0\}$ die Menge der festen Sprungzeiten von N.

Beweis. Folgt aus dem Satz von Poisson-Watanabe (Satz 6.7.1). □

6.8 Der stochastische Logarithmus

Lemma 6.8.1. *Es sei $Y \in \mathscr{S}$ ein Semimartingal mit $Y, Y_- \neq 0$. Dann ist $1/Y_-$ lokal beschränkt.*

Beweis. Wir definieren die monoton wachsende Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten durch

$$T_n := \inf\left\{t \in \mathbb{R}_+ : |Y_t| < \frac{1}{n}\right\}.$$

Wegen $Y, Y_- \neq 0$ folgt $T_n \to \infty$ und $|(1/Y_-)^{T_n}| \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Definition 6.8.2. *Für $Y \in \mathscr{S}$ mit $Y, Y_- \neq 0$ definieren wir den stochastischen Logarithmus $\mathscr{L}(Y) \in \mathscr{S}$ durch*

$$\mathscr{L}(Y) := \frac{1}{Y_-} \cdot Y.$$

Bemerkung 6.8.3. *Ist Y stetig differenzierbar mit $Y > 0$ und $Y_0 = 1$, dann gilt für jedes $t \in \mathbb{R}_+$*

$$\mathscr{L}(Y)_t = \int_0^t \frac{1}{Y_s} dY_s = \int_0^t \frac{Y_s'}{Y_s} ds = \ln Y_t - \ln Y_0 = \ln Y_t.$$

Also gilt $\mathscr{L}(Y) = \ln(Y)$.

Lemma 6.8.4. *Es sei $Y \in \mathscr{S}$ mit $Y, Y_- \neq 0$.*

(a) Es gilt $\mathscr{L}(Y) \in \mathscr{S}$ mit $\mathscr{L}(Y)_0 = 0$ und $\Delta\mathscr{L}(Y) \neq -1$.

(b) Falls $Y, Y_- > 0$, dann gilt $\Delta\mathscr{L}(Y) > -1$.

(c) Für $Y \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}$ gilt $\mathscr{L}(Y) \in \mathscr{L}$.

(d) Gilt $Y - Y_0 \in \mathscr{V}$, so gilt $\mathscr{L}(Y) \in \mathscr{V}$.

(e) Es gilt $\mathscr{L}(Y) = \mathscr{L}(Y/Y_0)$.

Beweis. Folgt nach Definition 6.8.2 und Satz 6.2.9. Insbesondere gilt

$$\Delta\mathscr{L}(Y) = \Delta\left(\frac{1}{Y_-} \cdot Y\right) = \frac{\Delta Y}{Y_-} = \frac{Y - Y_-}{Y_-} = \frac{Y}{Y_-} - 1 \neq -1,$$

und im Fall $Y, Y_- > 0$ folgt $\Delta\mathscr{L}(Y) > -1$. □

Satz 6.8.5 (Itô-Formel für offene Mengen)**.** *Es sei $X \in \mathscr{S}^d$. Weiterhin seien $U \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge mit $X, X_- \in U$ und $f \in C^2(U;\mathbb{R})$. Dann gilt*

$$f(X) = f(X_0) + \sum_{i=1}^{d} \partial_i f(X_-) \cdot X^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{ij} f(X_-) \cdot \langle X^{i,c}, X^{j,c} \rangle$$
$$+ \sum_{s \leq \bullet} \Big[f(X_s) - f(X_{s-}) - \sum_{i=1}^{d} \partial_i f(X_{s-}) \Delta X_s^i \Big].$$

Beweis. Siehe [GK00, Lemma A.5]. □

Satz 6.8.6. *Es sei $Y \in \mathscr{S}$ mit $Y, Y_- \neq 0$.*

(a) Der Prozess $X = \mathscr{L}(Y)$ ist das bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig bestimmte Semimartingal mit $X_0 = 0$ und $Y = Y_0 \mathcal{E}(X)$.

(b) Es gilt

$$\mathscr{L}(Y) = \ln \left| \frac{Y}{Y_0} \right| + \frac{1}{2Y_-^2} \cdot \langle Y^c, Y^c \rangle - \sum_{s \leq \bullet} \left(\ln \left| 1 + \frac{\Delta Y_s}{Y_{s-}} \right| - \frac{\Delta Y_s}{Y_{s-}} \right).$$

Beweis.

(a) Es sei $X := \mathscr{L}(Y)$. Dann gilt $X_0 = 0$. Weiterhin gilt nach Satz 6.2.9(h)

$$Y_0 + Y_- \cdot X = Y_0 + Y_- \cdot \left(\frac{1}{Y_-} \cdot Y \right) = Y_0 + \frac{Y_-}{Y_-} \cdot Y = Y + 1 \cdot Y = Y + (Y - Y_0) = Y.$$

Nach Satz 6.5.4 folgt $Y = Y_0 \mathcal{E}(X)$.

Nun sei $X \in \mathscr{S}$ irgendein Semimartingal mit $X_0 = 0$ und $Y = Y_0 \mathcal{E}(X)$. Nach Satz 6.5.4 gilt $Y = Y_0 + Y_- \cdot X$, und wegen $X_0 = 0$ folgt nach Satz 6.2.9(h)

$$X = 1 \cdot X = \frac{Y_-}{Y_-} \cdot X = \frac{1}{Y_-} \cdot (Y_- \cdot X) = \frac{1}{Y_-} \cdot (Y - Y_0) = \frac{1}{Y_-} \cdot Y = \mathscr{L}(Y).$$

(b) Für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(y) := \ln |y|$$

gilt $f \in C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R})$ mit

$$f'(y) = \frac{1}{y} \quad \text{und} \quad f''(y) = -\frac{1}{y^2}.$$

Außerdem gilt

$$\frac{Y}{Y_-} = \frac{Y_- + \Delta Y}{Y_-} = 1 + \frac{\Delta Y}{Y_-}.$$

Nach der Itô-Formel für offene Mengen (Satz 6.8.5) folgt

$$\begin{aligned}\ln|Y| &= \ln|Y_0| + \frac{1}{Y_-}\cdot Y - \frac{1}{2Y_-^2}\cdot\langle Y^c, Y^c\rangle + \sum_{s\le\bullet}\left(\ln|Y_s| - \ln|Y_{s-}| - \frac{\Delta Y_s}{Y_{s-}}\right)\\ &= \ln|Y_0| + \mathscr{L}(Y) - \frac{1}{2Y_-^2}\cdot\langle Y^c, Y^c\rangle + \sum_{s\le\bullet}\left(\ln\left|1+\frac{\Delta Y_s}{Y_{s-}}\right| - \frac{\Delta Y_s}{Y_{s-}}\right),\end{aligned}$$

und daher die behauptete Gleichung.

□

Korollar 6.8.7. *Ist $Y \in \mathscr{S}$ stetig mit $Y_0 = 1$, $Y, Y_- > 0$ und $Y - Y_0 \in \mathscr{V}$, so gilt $\mathscr{L}(Y) = \ln(Y)$.*

Beweis. Folgt aus Satz 6.8.6(b). □

Korollar 6.8.8. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Für $X \in \mathscr{S}$ mit $\Delta X \neq -1$ gilt $\mathscr{L}(\mathcal{E}(X)) = X - X_0$.

(b) Für $Y \in \mathscr{S}$ mit $Y, Y_- \neq 0$ gilt $\mathcal{E}(\mathscr{L}(Y)) = Y/Y_0$.

Beweis. Folgt aus Satz 6.8.6(a). □

Korollar 6.8.9. *Es sei $Y \in \mathscr{S}$ ein Semimartingal mit $Y, Y_- > 0$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Semimartingal $X \in \mathscr{S}$ mit $X_0 = 0$ und $\Delta X > -1$, so dass $Y = Y_0\mathcal{E}(X)$.*

Satz 6.8.10. *Für $Y, Z \in \mathscr{S}$ mit $Y, Y_- \neq 0$ und $Z, Z_- \neq 0$ gilt*

$$\mathscr{L}(YZ) = \mathscr{L}(Y) + \mathscr{L}(Z) + [\mathscr{L}(Y), \mathscr{L}(Z)].$$

Beweis. Nach Korollar 6.8.8 und Satz 6.5.8 gilt

$$\frac{YZ}{Y_0 Z_0} = \mathcal{E}(\mathscr{L}(Y))\mathcal{E}(\mathscr{L}(Z)) = \mathcal{E}(\mathscr{L}(Y) + \mathscr{L}(Z) + [\mathscr{L}(Y), \mathscr{L}(Z)])$$

Also folgt mit Korollar 6.8.8

$$\mathscr{L}(YZ) = \mathscr{L}\left(\frac{YZ}{Y_0 Z_0}\right) = \mathscr{L}(Y) + \mathscr{L}(Z) + [\mathscr{L}(Y), \mathscr{L}(Z)].$$

□

Literaturverzeichnis

[Bil68] Billingsley, P.: *Convergence of probability measures.* New York : John Wiley & Sons, 1968

[CE15] Cohen, S. N. ; Elliott, R. J.: *Stochastic calculus and applications.* New York : Birkhäuser, 2015

[Del72] Dellacherie, C.: *Capacités et processus stochastiques.* Heidelberg : Springer-Verlag, 1972

[GK00] Goll, T. ; Kallsen, J.: Optimal portfolios for logarithmic utility. In: *Stochastic Processes and their Applications* 89 (2000), Nr. 1, S. 31–48

[HWY92] He, S. ; Wang, J. ; Yan, J.: *Semimartingale theory and stochastic calculus.* Beijing : Science Press, 1992

[JP04] Jacod, J. ; Protter, P.: *Probability essentials.* Berlin : Springer-Verlag, 2004 (Universitext)

[JS03] Jacod, J. ; Shiryaev, A. N.: *Limit theorems for stochastic processes.* Berlin : Springer-Verlag, 2003 (Grundlagen der mathematischen Wissenschaften 288)

[Kle06] Klenke, A.: *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Berlin : Springer-Verlag, 2006

[KS91] Karatzas, I. ; Shreve, S. E.: *Brownian motion and stochastic calculus.* New York : Springer-Verlag, 1991

[Øk03] Øksendal, B.: *Stochastic differential equations.* Berlin : Springer-Verlag, 2003

[Pro05] Protter, P.: *Stochastic integration and differential equations.* Berlin : Springer-Verlag, 2005

[RY05] Revuz, D. ; Yor, M.: *Continuous martingales and Brownian motion.* Berlin : Springer-Verlag, 2005

[Sha88] Sharpe, M.: *General theory of Markov processes.* New York : Academic Press, 1988

[Ste01] Steele, J. M.: *Stochastic calculus and financial applications.* New York : Springer-Verlag, 2001