

# Übungen zur Vorlesung „Stochastische Modelle in der Biologie“

Wintersemester 2017/2018, Blatt 8

**Abgabetermin: 18.12.2017**, spätestens zu Beginn der Vorlesung

(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an)

Bitte maximal zu zweit abgeben!

Aufgaben die korrigiert werden sind mit einem Stern markiert.

## **Aufgabe 1\*** (Dualität)

(4 Punkte)

Sei  $X$  die Wright-Fisher-Diffusion ohne Mutation und Selektion, d.h. Lösung von  $dX = \sqrt{X(1-X)}dW$ , und  $N$  der Zählprozess im Coaleszenten, d.h. der Sprungprozess, der von  $n$  nach  $n-1$  mit Rate  $\binom{n}{2}$  springt. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}_x[X_t^n] = \mathbb{E}_n[x^{N_t}]$$

(wobei der Prozess  $X$  auf der linken Seite in  $x$  und der Prozess  $N$  auf der rechten Seite in  $n$  startet).

Hinweis: Eine Möglichkeit ist es, einen Wahrscheinlichkeitsraum zu betrachten, auf dem  $(X_s)_{0 \leq s \leq t}$  und  $(N_s)_{0 \leq s \leq t}$  unabhängig sind und zu zeigen, dass  $(X_s^{N_{t-s}})_{0 \leq s \leq t}$  ein Martingal ist.

## **Aufgabe 2\*** (Varianz des Frequenzspektrums)

(4 Punkte)

Sei  $S_1, \dots, S_{n-1}$  das in Definition 2.24 angegebene Frequenzspektrum.

Berechnen Sie  $\mathbb{V}[S_{n-1}]$ .