

Übungen zur Vorlesung

„Stochastische Modelle in der Biologie“

Wintersemester 2017/2018, Blatt 8

Abgabetermin: 18.12.2017, spätestens zu Beginn der Vorlesung

(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an)

Bitte maximal zu zweit abgeben!

Aufgaben die korrigiert werden sind mit einem Stern markiert.

Aufgabe 1* (Dualität)

(4 Punkte)

Sei X die Wright-Fisher-Diffusion ohne Mutation und Selektion, d.h. Lösung von $dX = \sqrt{X(1-X)}dW$, und N der Zählprozess im Coaleszenten, d.h. der Sprungprozess, der von n nach $n-1$ mit Rate $\binom{n}{2}$ springt. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}_x[X_t^n] = \mathbb{E}_n[x^{N_t}]$$

(wobei der Prozess X auf der linken Seite in x und der Prozess N auf der rechten Seite in n startet).

Hinweis: Eine Möglichkeit ist es, einen Wahrscheinlichkeitsraum zu betrachten, auf dem $(X_s)_{0 \leq s \leq t}$ und $(N_s)_{0 \leq s \leq t}$ unabhängig sind und zu zeigen, dass $(X_s^{N_{t-s}})_{0 \leq s \leq t}$ ein Martingal ist.

Aufgabe 2* (Varianz des Frequenzspektrums)

(4 Punkte)

Sei S_1, \dots, S_{n-1} das in Definition 2.24 angegebene Frequenzspektrum.

Berechnen Sie $\mathbb{V}[S_{n-1}]$.