

Übungen zur Vorlesung „Stochastische Modelle in der Biologie“

Wintersemester 2017/2018, Blatt 10

Abgabetermin: 15.01.2018, spätestens zu Beginn der Vorlesung

(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an)

Bitte maximal zu zweit abgeben!

Aufgaben die korrigiert werden sind mit einem Stern markiert.

Aufgabe 1* (erwartete Heterozygotie) (4 Punkte)

Berechnen Sie die erwartete Heterozygotie $\mathbb{E}_x[X_t(1 - X_t)]$, wenn X der SDE (2.5) mit $\alpha = 0$ folgt.

Aufgabe 2 (Urnenmodell für bakterielle Pangenome) (4 Punkte)

Betrachten Sie das folgende Urnenmodell:

In einer Urne sei ein schwarzer Ball mit Gewicht ρ und ein farbiger Ball mit Gewicht 1. Wir ziehen nun so lange Bälle bis n farbige Bälle in der Urne sind. Dabei warten wir jeweils eine exponential verteilte Zeit $T_i \sim \text{Exp}(\frac{i}{2}(i - 1 + \rho))$ bis wir den $i + 1$ -ten Ball ziehen. Wenn der schwarze Ball gezogen wird lege den schwarzen Ball zurück und einen neuen farbigen Ball mit Gewicht 1 mit einer bisher nicht vorhandenen Farbe. Wenn ein farbiger Ball gezogen wird lege den Ball zurück in die Urne und einen weiteren farbigen Ball der gleichen Farbe, ebenfalls mit Gewicht 1. Während der Wartezeit T_i markiere jeden der i Bälle in der Urne unabhängig mit Rate $\frac{\theta}{2}du$. Wenn ein markierter Ball gezogen wird, soll der neu hinzugefügte Ball ebenfalls markiert sein.

- Was ist die Wahrscheinlichkeit das ein Ball der während T_i markiert wurde noch k mal gezogen wird?
- Was ist $\mathbb{E}[G_k]$ die erwartete Anzahl an markierten Bällen am Ende der Prozedur?

Aufgabe 3 (4 Bonus-Punkte)

Zeigen Sie das Drittelgesetz unter linearer frequenzabhängiger Selektion:

Löst X die SDE

$$dX = \alpha(\beta - \gamma X)X(1 - X)dt + \sqrt{X(1 - X)}dW,$$

so gilt

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha x} (\mathbb{P}_x[T_1 < T_0] - x) = (1 - x)(\beta - \frac{\gamma}{3}(1 + x)).$$