# Übungen zur Vorlesung
# „Stochastische Modelle in der Biologie“

**Wintersemester 2017/2018, Blatt 6**

**Abgabetermin: 04.12.2017,** spätestens zu Beginn der Vorlesung
(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an)
Bitte maximal zu zweit abgeben!
Aufgaben die korrigiert werden sind mit einem Stern markiert.

**Definition: neutrales Wright-Fisher Model**
Im Wright Fisher Model wird eine Population mit $N$ diploiden Individuen in Generation $n$ durch eine Urne mit $2N$ Bällen dargestellt. Die Farbe der Bälle entspricht dem Typ des Alleles/Individuums.

Die Population in Generation $n+1$ wird nun durch $2N-$maliges ziehen **mit** zurücklegen aus Generation $n$ gebildet.

**Aufgabe 1* Fixation im neutralen Wright-Fisher Model** (4 Punkte)
Sei $X_n$ die Anzahl der Individuen eines Typs in Generation $n \in \mathbb{N}$ und

$$\tau = \min\{n : X_n = 0 \text{ oder } X_n = 2N\}$$

Berechnen Sie $\mathbb{P}(X_\tau = 2N | X_1 = i)$. Was ist die Wahrscheinlichkeit für die Nachkommen eines Individuums zu überleben.

**Aufgabe 2* infinitesimale Parameter im Wright-Fisher Model mit selection und mutation** (4 Punkte)
Wir betrachten ein WF-modell mit zwei Typen $A$ und $a$.

*Selektion:* Der Typ $a$ habe eine kleinere Fitness als $A$. D.h. nachdem aus der Urne ein Typ $a$ gezogen wurde wird dieser mit Wsk $1-s$ akzeptiert und mit Wsk $s = \gamma(2N)^{-1}$ verworfen. Es wird trotzdem solange gezogen bis $2N$ Individuen akzeptiert wurden.

*Mutation:* Nachdem alle Individuen gezogen wurden mutiert jedes Individuen von Typ $a \to A$ mit Wsk $\mu_1 = \beta_1(2N)^{-1}$ und von $A \to a$ mit Wsk $\mu_2 = \beta_2(2N)^{-1}$.

Sei $X_0 = x$, wobei $x2N$ die Anzahl der Individuen vom Typ $A$ in Generation 0 ist und sei $Y_t := X_{[2Nt]}$

Berechnen Sie für $N \to \infty$, den infinitesimalen Erwartungswert und die infinitesimale Varianz

$$\frac{d}{dt}E_x[Y_t]\Big|_{t=0} \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dt}E_x[(Y_t - x)^2]\Big|_{t=0}$$