Übungen zur Vorlesung „Stochastische Modelle in der Biologie“

Wintersemester 2017/2018, Blatt 1

Abgabetermin: 06.11.2017, spätestens zu Beginn der Vorlesung

(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an)

Bitte maximal zu zweit abgeben!

Aufgaben die korrigiert werden sind mit einem Stern markiert.

Aufgabe 1* (4 Punkte)

Betrachten Sie das Reaktionsnetzwerk

$$\mathrm{A} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftharpoons}} \mathrm{B}$$

Sei X_t die Anzahl an A-Molekülen zur Zeit t,
Y_t die Anzahl an B-Molekülen zur Zeit t und $N = X_t + Y_t$.
Zeigen Sie $X_t \sim Y + Z$, wobei $Y \sim B(X_0, e^{-(\alpha+\beta)t}), W \sim B(Y_0, e^{-(\alpha+\beta)t})$ und $Z \sim B(N - W - Y, \beta/(\alpha+\beta))$.

Aufgabe 2* (4 Punkte)

Seien $X_1, ..., X_5$ unabhängige Poissonprozesse mit Intensität 1 und seien $\lambda_1(n)$ und $\lambda_2(n)$ positiv für $n \in \mathbb{N}_0$. Für $a \wedge b := \min(a, b)$ sei weiter

$$N_1(t) = X_1\Big(\int_0^t \lambda_1(N_1(s))ds\Big)$$

$$N_2(t) = X_2\Big(\int_0^t \lambda_2(N_2(s))ds\Big)$$

$$N_3(t) = X_3\Big(\int_0^t \lambda_1(N_3(s)) \wedge \lambda_2(N_4(s))ds\Big) + X_4\Big(\int_0^t \lambda_1(N_3(s)) - \lambda_1(N_3(s)) \wedge \lambda_2(N_4(s))ds\Big)$$

$$N_4(t) = X_3\Big(\int_0^t \lambda_1(N_3(s)) \wedge \lambda_2(N_4(s))ds\Big) + X_5\Big(\int_0^t \lambda_2(N_4(s)) - \lambda_1(N_3(s)) \wedge \lambda_2(N_4(s))ds\Big)$$

a) Zeigen Sie dass $N_3 \sim N_1$ und $N_4 \sim N_2$.

Sei $\epsilon > 0$ und $|\lambda_1(n) - \lambda_2(n)| \leq \epsilon$.
Sei $\tau_1 = \inf\{t : N_1(t) \neq N_2(t)\}$ und $\tau_2 = \inf\{t : N_3(t) \neq N_4(t)\}$.

b) Finden Sie eine Zufallsvariable σ_1 für die gilt $P(\tau_1 \geq t) \geq P(\sigma_1 \geq t)$ für alle t.
Die ZV σ_1 ist dann stochastisch kleiner als τ_1.
Finden Sie eine Zufallsvariable σ_2 die stochastisch kleiner als τ_2 ist.
Zeigen Sie τ_1 ist stochastisch kleiner als τ_2.