

Übungen zur Vorlesung „Stochastische Modelle in der Biologie“

Wintersemester 2017/2018, Blatt 1

Abgabetermin: 23.10.2017, spätestens zu Beginn der Vorlesung

(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an)

Bitte maximal zu zweit abgeben!

Aufgaben die korrigiert werden sind mit einem Stern markiert.

Aufgabe 1 (Wartezeiten im Poissonprozess)

(4 Punkte)

Sei X ein Markov-Prozess mit Generator G . Zeigen Sie, dass

$$\exp\left(f(X_t) - \int_0^t e^{-f(X_s)} G e^f(X_s) ds\right)$$

für $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ mit $G e^f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ ein Martingal ist.

Aufgabe 2 (Ausdünnung der Poisson-Verteilung)*

(4 Punkte)

Betrachten Sie folgende Menge \mathcal{R} von chemischen Reaktionen:

$$\mathcal{R} = \{A \rightarrow 2B, A + C \rightarrow D, D \rightarrow B + E, D \rightarrow A + C, 2B \rightarrow A, B + E \rightarrow A + C\}$$

Geben Sie das passende Tripel $(\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R})$ an. Zeichnen Sie das passende chemische Reaktionsnetzwerk auf. Was ist die Ordnung des Netzwerks?

Aufgabe 3 (Mastergleichung)*

(4 Punkte)

Zeigen Sie das die Mastergleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{P}(X_t = 0) &= -\lambda \mathbf{P}(X_t = 0) \\ \frac{d}{dt} \mathbf{P}(X_t = k) &= \lambda \mathbf{P}(X_t = k - 1) - \lambda \mathbf{P}(X_t = k) \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

von einem Poissonprozess gelöst wird.