Übungen zur Vorlesung
„Stochastische Modelle in der Biologie“

Wintersemester 2017/2018, Blatt 13

Abgabetermin: 5.2.2018, spätestens 14 Uhr im Sekretariat Stochastik

(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an)

Bitte maximal zu zweit abgeben!

Aufgaben die korrigiert werden sind mit einem Stern markiert.

Aufgabe 1* (6 Punkte)

Sei X die Lösung von $dX = \alpha X dt + \sqrt{\sigma^2 X} dW$.

a) Sei p^N eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\{0, 1, 2, ...\}$ und X^N der zeit-kontinuierliche Verzweigungsprozess mit Nachkommensverteilung p, d.h. der Markov-Prozess mit Generator

$$G^N f(x) = Nx \sum_{k=0}^{\infty} p^N(k)(f(x-1+k) - f(x)).$$

Zeigen Sie: Gilt $N\Big(\Big(\sum kp^N(k)\Big) - 1\Big) \xrightarrow{N\to\infty} \alpha$ und $\Big(\Big(\sum k^2 p^N(k)\Big) - 1\Big) \xrightarrow{N\to\infty} \sigma^2$, so ist $X^N/N \xRightarrow{N\to\infty}_{fdd} X$.

Zeigen Sie weiterhin die *compact-containment-Bedingung*, d.h. für jedes $T > 0$ gilt

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{N\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\sup_{0\le t\le T} |X_t^N| > K) = 0.$$

b) Sei X^N die Häufigkeit des Allels A in einem 2-Allel-Moran-Modell mit Selektion der Stärke s_N, d.h. der Markov-Sprung-Prozess mit Generator

$$G^N f(x) = \Big(\frac{1}{2} + s_N\Big)x(N-x)(f(x+1) - f(x)) + \frac{1}{2}x(N-x)(f(x-1) - f(x)).$$

Weiter sei $0 < a < 1$, $Y^N = (Y_t^N)_{t\ge 0}$ mit $Y_t^N = X_{t/N^{1-a}}^N$. Falls $Y_0^N/N^a \to y$ und $s_N = \alpha/N^a$, so konvergiert $Y^N/N^a \xRightarrow{N\to\infty} X$ mit $\sigma^2 = 1$.

Aufgabe 2* (4 Punkte)

Seien $S_1, S_2, ... \in (0, \infty)$ unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbf{E}[S_1] = \mu$ und $\mathbf{Var}[S_1] = \sigma^2$. Weiter sei $T_1 := S_1, T_{n+1} = T_n + S_{n+1}, n = 1, 2, ...$ und $X_t := \sup\{k : T_k \le t\}$. Zeigen Sie:

$$\frac{X_t}{t} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\mu},$$
$$\frac{X_t - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{t\sigma^2/\mu^3}} \xRightarrow{t\to\infty} Z \sim N(0,1).$$