Übungen zur Vorlesung „Stochastische Modelle in der Biologie“

Wintersemester 2017/2018, Blatt 11

Abgabetermin: 29.01.2018, spätestens zu Beginn der Vorlesung
(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an)
Bitte maximal zu zweit abgeben!
Aufgaben die korrigiert werden sind mit einem Stern markiert.

Aufgabe 1* (4 Punkte)

Zeigen Sie: Sei X eine Brown'sche Bewegung mit Drift $\mu > 0$ und $X_0 = 0$, d.h. X ist Lösung von $dX + \mu dt + dW$. Dann ist

$$f(t) = \frac{x}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\Big(-\mu^2 \frac{(t-x/\mu)^2}{2t} \Big) 1_{[0,\infty)}(t)$$

die Dichte von $T_x := \inf\{t \geq 0 : X_t = x\}$ mit $x > 0$.

Aufgabe 2* (4 Punkte)

In einem Modell für N interagierende Neuronen ist Neuron i entweder inaktiv ($X_i = 0$) oder aktiv ($X_i = 1$). Die Rate, mit der Neuron i (unabhängig von den anderen Neuronen) von 0 nach 1 springt, ist dabei durch

$$g(u(X)) \text{ mit } u(X) = -m + c \sum_{j=1}^{N} X_j$$

gegeben, wobei $g : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine glatte Funktion, und $m \in \mathbb{R}$. Weiter ist die Rate, mit der das Neuron von 1 nach 0 springt, gerade $1 - g(u(X))$.

Zeigen Sie: Ist $Nc \xrightarrow{N\to\infty} \kappa$, so ist

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} X_j \xRightarrow{N\to\infty}_{fdd} X, \text{ wobei } \dot{X} = g(-m + \kappa X) - X.$$

Aufgabe 3

Sei X Lösung der SDE (2.5) mit $0 < \theta_a < 1$ und $\theta_A > 1$. Zeigen Sie, dass $T_1 = \infty$ fast sicher.

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass $(S(X_t))_{t\geq 0}$ ein Martingal ist.