Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Vorlesungsskript

Stochastic Analysis with Rough Paths

apl. Prof. Dr. Stefan Tappe

Wintersemester 2017/18

Abteilung für Mathematische Stochastik

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Grundlagen aus der Funktionalanalysis

Definition 1.1.1. *Es sei T eine Menge. Eine Abbildung $\rho : T \times T \to \mathbb{R}_+$ heißt eine Halbmetrik, falls gilt:*

(1) $\rho(s,t) = \rho(t,s)$ für alle $s,t \in T$.

(2) $\rho(s,u) \leq \rho(s,t) + \rho(t,u)$ für alle $s,t,u \in T$.

(3) $\rho(s,s) = 0$ für alle $s \in T$.

In diesem Fall nennen wir (T,ρ) (oder kürzer T) einen halbmetrischen Raum. Gilt statt (3) sogar die stärkere Bedingung

(3') Für alle $s,t \in T$ gilt genau dann $\rho(s,t) = 0$, wenn $s = t$,

so nennen wir ρ eine Metrik und (T,ρ) (oder kürzer T) einen metrischen Raum.

Es sei (T,ρ) ein halbmetrischer Raum.

Definition 1.1.2. *Eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ heißt konvergent gegen ein $t \in T$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\rho(t_n,t) \leq \epsilon$ für alle $n \geq N$. In diesem Fall schreiben wir $t_n \to t$.*

Bemerkung 1.1.3. *Ist T ein metrischer Raum, so ist der Limes t einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt, und wir schreiben auch $\lim_{n\to\infty} t_n = t$.*

Definition 1.1.4. *Eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ heißt eine Cauchyfolge, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\rho(t_n,t_n) \leq \epsilon$ für alle $n,m \geq N$.*

Es seien (T_1,ρ_1) und (T_2,ρ_2) halbmetrische Räume. Weiterhin sei $f : T_1 \to T_2$ eine Abbildung.

Definition 1.1.5. *f heißt stetig an der Stelle $t_0 \in T_1$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass*

$$\rho_2(f(t), f(t_0)) \leq \epsilon \quad \text{für alle } t \in T_1 \text{ mit } \rho_1(t, t_0) \leq \delta.$$

Satz 1.1.6. *Sind T_1 und T_2 metrische Räume, so sind für alle $t_0 \in T_1$ die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) f ist stetig bei t_0.

(ii) Für jede Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1$ mit $t_n \to t_0$ gilt $f(t_n) \to f(t_0)$.

Definition 1.1.7. *Die Abbildung f heißt stetig, falls sie an jeder Stelle $t_0 \in T_1$ stetig ist.*

Satz 1.1.8. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) f ist stetig.

(ii) Für jede offene Menge $O \subset T_2$ ist $f^{-1}(O)$ offen in T_1.

(iii) Für jede abgeschlossene Menge $A \subset T_2$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in T_1.

Definition 1.1.9. *Die Abbildung f heißt gleichmäßig stetig, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass*

$$\rho_2(f(s), f(t)) \leq \epsilon \quad \text{für alle } s, t \in T_1 \text{ mit } \rho_1(s, t) \leq \delta.$$

Definition 1.1.10. *Die Abbildung f heißt Lipschitz-stetig, falls eine Konstante $L > 0$ existiert, so dass*

$$\rho_2(f(s), f(t)) \leq L \cdot \rho_1(s, t) \quad \text{für alle } s, t \in T_1.$$

Definition 1.1.11. *Die Abbildung f heißt lokal Lipschitz-stetig, falls zu jedem $t_0 \in T_1$ eine Umgebung U von t_0 existiert, so dass $f|_U : (U, \rho_1) \to (T_2, \rho_2)$ Lipschitz-stetig ist.*

Allgemeiner führen wir folgendes Konzept ein:

Definition 1.1.12. *Es sei $\alpha \in (0, 1]$ beliebig. Die Abbildung f heißt Hölder-stetig der Ordnung α, falls eine Konstante $L > 0$ existiert, so dass*

$$\rho_2(f(s), f(t)) \leq L \cdot \rho_1(s, t)^\alpha \quad \text{für alle } s, t \in T_1.$$

Definition 1.1.13. *Die Abbildung f heißt lokal Hölder-stetig der Ordnung α, falls zu jedem $t_0 \in T_1$ eine Umgebung U von t_0 existiert, so dass $f|_U : (U, \rho_1) \to (T_2, \rho_2)$ Hölder-stetig der Ordnung α ist.*

Definition 1.1.14. *Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+$ heißt eine Halbnorm, falls gilt:*

(1) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}$ *und alle* $x \in V$.

(2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *für alle* $x, y \in V$.

In diesem Fall nennen wir $(V, \|\cdot\|)$ (oder kürzer V) einen halbnormierten Raum. Gilt zusätzlich

(3) Für alle $x \in V$ gilt genau dann $\|x\| = 0$, wenn $x = 0$,

so nennen wir $\|\cdot\|$ eine Norm, und $(V, \|\cdot\|)$ (oder kürzer V) einen normierten Raum.

Bemerkung 1.1.15. *Häufig werden wir kürzer $(V, |\cdot|)$ schreiben.*

Beispiel 1.1.16. *Es seien $(V, \|\cdot\|)$ ein halbnormierter bzw. ein normierter Raum, und $T \subset V$ eine Teilmenge. Dann ist T versehen mit der Abbildung*

$$\rho : T \times T \to \mathbb{R}, \quad \rho(s,t) := \|s - t\|$$

ein halbmetrischer bzw. ein metrischer Raum.

Definition 1.1.17.

(a) Ein metrischer Raum, in dem jede Cauchyfolge konvergiert, heißt vollständig.

(b) Ein vollständiger normierter Raum heißt ein Banachraum.

Satz 1.1.18. *Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum.*

(a) Alle Normen auf V sind äquivalent; das heißt, für zwei Normen $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ existieren Konstanten $m, M > 0$, so dass

$$m\|x\| \leq |||x||| \leq M\|x\| \quad \text{für alle } x \in V.$$

(b) V ist bezüglich jeder Norm ein Banachraum.

Beispiel 1.1.19. *Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und V ein Banachraum. Weiterhin sei $p \in [1, \infty)$ beliebig.*

(a) Es sei $\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}; V)$ der Raum aller V-wertigen Zufallsvariablen X mit

$$|X|_{\mathscr{L}^p} := \mathbb{E}[\|X\|^p]^{1/p} < \infty.$$

Dann ist $|\cdot|_{\mathscr{L}^p}$ ein Halbnorm auf $\mathscr{L}^p$, und $\mathscr{L}^p$ ist ein vollständiger halbnormierter Raum.

(b) *Der Raum* $L^p = \mathscr{L}^p/N$ *mit* $N = \{X : X = 0$ *fast überall*$\}$ *ist ein Banachraum.*

Beispiel 1.1.20. *Es seien* T *ein metrischer Raum und* V *ein Banachraum. Dann ist der Raum* $C_b(T, V)$ *aller stetigen und beschränkten Funktionen* $f : T \to V$ *versehen mit der Supremumsnorm*

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in V} \|f(x)\|$$

ein Banachraum.

Beispiel 1.1.21. *Es seien* T *ein metrischer Raum und* V *ein Banachraum, sowie* $\alpha \in (0, 1]$. *Es sei* $C^\alpha = C^\alpha(T, V)$ *der Raum aller Hölder-stetigen Funktionen der Ordnung* α.

(a) *Die Vorschrift*

$$\|f\|_\alpha := \sup_{\substack{s,t \in T \\ s \neq t}} \frac{|f(s) - f(t)|}{\rho(s,t)^\alpha} < \infty$$

definiert eine Halbnorm, bezüglich der C^α *ein vollständiger halbnormierter Raum ist.*

(b) *Eine Norm ist gegeben durch*

$$\|f\|_{C^\alpha} := \|f\|_\infty + \|f\|_\alpha,$$

und bezüglich dieser Norm ist $C^\alpha(T, V)$ *ein Banachraum.*

Bemerkung 1.1.22. *Für* $\alpha, \beta \in (0, 1]$ *mit* $\alpha \leq \beta$ *gilt* $C^\beta \subset C^\alpha$.

Satz 1.1.23. *Es seien* T *ein kompakter metrischer Raum und* V *ein Banachraum. Es sei* $f : T \to V$ *lokal Hölder-stetig der Ordnung* α. *Dann ist* f *sogar Hölder-stetig der Ordnung* α*; das heißt* $f \in C^\alpha(T, V)$.

Beweis. Zu jedem $t \in T$ existieren eine offene Umgebung U_t von t und eine Konstante $L(t) > 0$, so dass

$$|f(r) - f(s)| \leq L(t) \cdot \rho(r,s)^\alpha \quad \text{für alle } r, s \in U_t.$$

Da T kompakt ist, existiert zu der offenen Überdeckung $T = \bigcup_{t \in T} U_t$ eine endliche Teilüberdeckung $T = \bigcup_{k=1}^n U_{t_k}$. Nach dem Satz von der Lebesguezahl existiert ein $\delta > 0$, so dass für jede Menge $A \subset T$ mit $\operatorname{diam} A \leq \delta$ ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $A \subset U_{t_k}$ existiert. Wir setzen

$$L := \max\{L(t_1), \ldots, L(t_n), 2\|f\|_\infty \delta^{-\alpha}\}.$$

Es seien $r, s \in T$ beliebig. Falls $\rho(s,r) \leq \delta$, dann existiert ein $k \in \{1,\dots,n\}$ mit $r, s \in U_{t_k}$, und es folgt

$$|f(s) - f(r)| \leq L(t_k) \cdot \rho(r,s)^\alpha \leq L \cdot \rho(r,s)^\alpha$$

Falls $\rho(s,r) > \delta$, so folgt

$$|f(s) - f(r)| \leq 2\|f\|_\infty \left(\frac{\rho(r,s)}{\delta}\right)^\alpha \leq L \cdot \rho(r,s)^\alpha.$$

□

Im Folgenden seien V und W normierte Räume.

Bemerkung 1.1.24. *Es sei $f : V \to W$ eine Funktion, so dass zu jedem $C > 0$ eine Konstante $L = L(C) > 0$ existiert, so dass*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in V \text{ mit } \|x\|, \|y\| \leq C.$$

Dann ist f lokal Lipschitz-stetig.

Satz 1.1.25. *Es sei $T : V \to W$ linear. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) T ist stetig.

(ii) T ist stetig bei 0.

(iii) Es existiert ein $M \geq 0$ mit

$$\|Tx\| \leq M\|x\| \quad \text{für alle } x \in V.$$

(iv) T ist Lipschitz-stetig.

Definition 1.1.26. *In diesem Fall nennen wir T einen <u>stetigen</u> (oder auch <u>beschränkten</u>) linearen Operator.*

Satz 1.1.27. *Ist V endlich-dimensional, dann ist jeder lineare Operator stetig.*

Satz 1.1.28.

(a) Der Raum $L(V, W)$ aller stetigen linearen Operatoren, versehen mit der Operatornorm

$$\|T\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|,$$

ist ebenfalls ein normierter Raum.

(b) Falls W ein Banachraum ist, so ist $L(V, W)$ ebenfalls ein Banachraum.

Bemerkung 1.1.29. *Wir schreiben auch $L(V)$ anstatt $L(V, V)$.*

Definition 1.1.30. *Den Raum $V' := L(V, \mathbb{R})$ heißt der Dualraum von V.*

Korollar 1.1.31. *Der Dualraum V' ist stets ein Banachraum.*

Beweis. Folgt aus Satz 1.1.28(b). □

Definition 1.1.32. *Es sei $T : V \to W$ ein stetiger linearer Operator.*

(a) T heißt ein Isomorphismus, falls T bijektiv und T^{-1} stetig ist.

(b) T heißt isometrisch, falls $\|Tx\| = \|x\|$ für alle $x \in V$.

Definition 1.1.33. *Normierte Räume V und W, zwischen denen ein (isometrischer) Isomorphismus existiert, heißen (isometrisch) isomorph, in Zeichen $V \simeq W$ (bzw. $V \cong W$).*

Satz 1.1.34. *Es seien $V_1, \ldots, V_m$ und W normierte Räume, und es sei $T : V_1 \times \ldots \times V_m \to W$ multilinear. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) T ist stetig.

(ii) T ist stetig bei 0.

(iii) Es existiert ein $M \geq 0$ mit

$$\|T(x_1, \ldots, x_m)\| \leq M\|x_1\| \cdot \ldots \cdot \|x_m\| \quad \text{für alle } x_j \in V_j, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Definition 1.1.35. *In diesem Fall nennen wir T einen stetigen (oder auch beschränkten) multilinearen Operator. Falls $m = 2$, so nennen wir T bilinear.*

Satz 1.1.36.

(a) Der Raum $L^{(m)}(V_1 \times \ldots \times V_m, W)$, versehen mit

$$\|T\| := \sup\{\|T(x_1, \ldots, x_m)\| : \|x_j\| \leq 1,\, 1 \leq j \leq m\},$$

ist ebenfalls ein normierter Raum.

(b) Falls W ein Banachraum ist, so ist $L^{(m)}(V_1 \times \ldots \times V_m, W)$ ebenfalls ein Banachraum.

Satz 1.1.37.

(a) *Es gilt* $L^{(m)}(V_1 \times \ldots \times V_m, W) \cong L(V_1, L^{(m-1)}(V_2 \times \ldots \times V_m, W))$ *für jedes* $m \geq 2$.

(b) *Insbesondere gilt* $L^{(2)}(V_1 \times V_2, W) \cong L(V_1, L(V_2, W))$.

Es sei $U \subset V$ offen, und es sei $f : U \to W$ eine Abbildung.

Definition 1.1.38.

(a) *f heißt Gâteaux-differenzierbar bei $x_0 \in U$, falls ein stetiger linearer Operator $T = Df(x_0) \in L(V, W)$ existiert, so dass*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} = Tv \quad \textit{für alle } v \in V.$$

(b) *f heißt Fréchet-differenzierbar bei $x_0 \in U$, falls die Konvergenz gleichmäßig bezüglich $\|v\| \leq 1$ ist.*

(c) *f heißt Gâteaux bzw. Fréchet-differenzierbar auf U, falls f an jeder Stelle $x_0 \in U$ Gâteaux bzw. Fréchet-differenzierbar ist.*

Bemerkung 1.1.39. *Ist f Gâteaux-differenzierbar, so definiert dies die Ableitung $Df : U \to L(V, W)$.*

Die Fréchet-Differenzierbarkeit entspricht der totalen Differenzierbarkeit im Endlich-Dimensionalen, wie das folgende Resultat zeigt:

Satz 1.1.40. *Die Abbildung f ist genau dann bei $x_0 \in U$ Fréchet-differenzierbar, falls ein stetiger linearer Operator $T \in L(V, W)$ existiert, so dass*

$$f(x_0 + u) = f(x_0) + Tu + r(u), \quad \textit{wobei } \lim_{\|u\| \to 0} \frac{r(u)}{\|u\|} = 0.$$

In diesem Fall ist $Df(x_0) = T$.

Definition 1.1.41. *Falls f Gâteaux-differenzierbar und $Df : U \to L(V, W)$ stetig ist, so sagen wir, dass f stetig differenzierbar ist, und schreiben $f \in C^1(U, W)$.*

Satz 1.1.42. *Gilt $f \in C^1(U, W)$, so ist f auch Fréchet-differenzierbar.*

Bemerkung 1.1.43. *Analog definieren wir (sofern existent) höhere Ableitungen $D^n f$ und die Räume $C^n(U, W)$ für $n \in \mathbb{N}$. Mit Satz 1.1.37 gilt*

$$\begin{aligned} &Df : U \to L(V, W), \\ &D^2 f : U \to L(V, L(V, W)) \cong L^{(2)}(V \times V, W), \end{aligned}$$

und induktiv gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$D^n f : U \to L(V, L^{(n-1)}(V \times \ldots \times V, W)) \cong L^{(n)}(V \times \ldots \times V, W).$$

Definition 1.1.44. *Es sei $C_b^n(V,W)$ der Raum aller $f \in C^n(V,W)$, so dass*

$$\|f\|_{C_b^n} := \sum_{k=1}^{n} \|D^k f\|_\infty < \infty.$$

Satz 1.1.45. *Der Raum $C_b^n(V,W)$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{C_b^n}$ ist ein Banachraum.*

Satz 1.1.46. *Die offene Menge U sei konvex, und $f \in C^1(U,W)$ sei stetig differenzierbar mit $\|Df\|_\infty < \infty$. Dann gilt*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|Df\|_\infty \|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in U,$$

und folglich ist f Lipschitz-stetig.

Satz 1.1.47 (Satz von Taylor)**.** *Die offene Menge U sei konvex, und es sei $f \in C^n(U,W)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$f(x+v) = f(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{D^k f(x)(v,\ldots,v)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} D^n f(x+tv)(v,\ldots,v)\, dt$$

für alle $x \in U$ und $v \in V$ mit $x + v \in U$.

Korollar 1.1.48. *Die offene Menge U sei konvex, und es sei $f \in C^n(U,W)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|D^n f\|_\infty < \infty$. Dann gilt*

$$\left\| f(x) - f(y) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{D^k f(y)(x-y,\ldots,x-y)}{k!} \right\| \leq \frac{1}{n!} \|D^n f\|_\infty \|x-y\|^n$$

für alle $x, y \in U$.

Beweis. Folgt aus Satz 1.1.47 unter Beachtung von

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, dt = \frac{1}{n!}.$$

□

Bemerkung 1.1.49.

(a) Für $n = 1$ erhalten wir die Abschätzung aus Satz 1.1.46, und zwar

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|Df\|_\infty \|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in U.$$

(b) Für $n = 2$ erhalten wir die Abschätzung

$$\|f(x) - f(y) - Df(y)(x-y)\| \leq \frac{1}{2} \|D^2 f\|_\infty \|x-y\|^2 \quad \text{für alle } x, y \in U.$$

Es sei $f : \mathbb{R}_+ \to V$ eine stetige Funktion mit Werten in einem Banachraum V. Wie im Reellen definieren wir das Riemann-Integral

$$\int_a^b f(s)ds.$$

Satz 1.1.50. *Es sei $f : \mathbb{R}_+ \to V$ eine stetige Funktion.*

(a) Es gilt der Hauptsatz

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s)\,ds = f(t).$$

(b) Für einen stetigen linearen Operator $T : V \to W$ gilt

$$T\Big(\int_a^b f(s)\,ds \Big) = \int_a^b T(f(s))\,ds.$$

Definition 1.1.51. *Eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to V$ heißt lokal von beschränkter Variation, falls*

$$\lim_{|\Pi_t|\to 0} \sum_{[u,v]\in\Pi_t} \|f(u) - f(v)\| < \infty \quad \textit{für jedes } t \in \mathbb{R}_+,$$

wobei Π_t eine Partition des Intervalls $[0,t]$ bezeichnet.

1.2 Das Tensorprodukt

Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume.

Satz 1.2.1. *Es existieren ein Vektorraum $V \otimes W$ und eine bilineare Abbildung $\otimes : V \times W \to V \otimes W$, so dass zu jeder bilinearen Abbildung $S : V \times W \to X$ in einen weiteren endlich-dimensionalen Vektorraum X eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $T : V \otimes W \to X$ mit $S = T \circ \otimes$ existiert.*

Der neue Vektorraum $V \otimes W$ und die bilineare Abbildung $\otimes : V \times W \to V \otimes W$ sind nicht eindeutig bestimmt. Sie sind jedoch eindeutig bis auf Isomorphie, wie aus dem folgenden Resultat hervorgeht:

Satz 1.2.2. *Es seien $V\bar{\otimes}W$ ein weiterer Vektorraum und $\bar{\otimes} : V \times W \to V\bar{\otimes}W$ eine weitere bilineare Abbildung, so dass die Eigenschaft aus Satz 1.2.1 erfüllt sind. Dann existiert ein Isomorphismus $\Psi : V \otimes W \to V\bar{\otimes}W$, so dass $\bar{\otimes} = \Psi \circ \otimes$.*

Definition 1.2.3. *Wir nennen den bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten endlich-dimensionalen Vektorraum $V \otimes W$ das* <u>*algebraische Tensorprodukt*</u> *von V und W.*

Definition 1.2.4. *Elemente der Form $v \otimes w \in V \otimes W$ mit $v \in V$ und $w \in W$ nennen wir* <u>*Tensoren*</u>.

Bemerkung 1.2.5. *Es gilt $\otimes(V \times W) \subset V \otimes W$.*

Satz 1.2.6. *Es gilt*

$$\operatorname{lin}\big(\otimes(V \times W)\big) = V \otimes W.$$

Bemerkung 1.2.7. *Es sei $\{e_1, \ldots, e_m\}$ eine Basis von V, und es sei $\{f_1, \ldots, f_n\}$ eine Basis von W. Dann ist*

$$\{e_i \otimes f_j : i = 1, \ldots, m \text{ und } j = 1, \ldots, n\}$$

eine Basis von $V \otimes W$. Insbesondere gilt

$$\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W.$$

Nun sei X ein weiterer endlich-dimensionaler Vektorraum, und es sei $\{g_1, \ldots, g_p\}$ eine Basis von X. Weiterhin sei $S : V \otimes W \to X$ eine bilineare Abbildung. Dann existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{(m \times n) \times p}$, so dass

$$S\bigg(\sum_{i=1}^{m} v_i e_i, \sum_{j=1}^{n} w_j f_j\bigg) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} v_i w_j A_{ij}^k g_k.$$

Es sei $T : V \otimes W \to X$ der lineare Operator gegeben durch

$$T\bigg(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_{ij}(e_i \otimes f_j)\bigg) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} u_{ij} A_{ij}^k g_k.$$

Dann gilt $S = T \circ \otimes$, denn

$$\begin{aligned} T\Bigg(\bigg(\sum_{i=1}^{m} v_i e_i\bigg) \otimes \bigg(\sum_{j=1}^{n} w_j f_j\bigg)\Bigg) &= T\bigg(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_i w_j (e_i \otimes f_j)\bigg) \\ &= S\bigg(\sum_{i=1}^{m} v_i e_i, \sum_{j=1}^{n} w_j f_j\bigg). \end{aligned}$$

Beispiel 1.2.8. *Es gilt $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m \times n}$ mit dem dyadischen Produkt*

$$\otimes : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m \times n}, \quad x \otimes y := x \cdot y^\top.$$

Es gilt also

$$(x \otimes y)_{ij} = x_i \cdot y_j, \quad i = 1, \ldots, m \text{ und } j = 1, \ldots, n.$$

Nun seien V und W Banachräume.

Satz 1.2.9. *Es existieren ein weiterer Banachraum $V \otimes W$ und eine stetige bilineare Abbildung $\otimes : V \times W \to V \otimes W$, so dass gilt:*

(1) $|v \otimes w| \leq |v| \cdot |w|$ *für alle* $v \in V$ *und* $w \in W$.

(2) $L^{(2)}(V \times W, X) \cong L(V \otimes W, X)$ *für jeden weiteren Banachraum* X.

Bemerkung 1.2.10. *Mit Satz 1.1.37 gilt*

$$L(V \otimes V, W) \cong L^{(2)}(V \times V, W) \cong L(V, L(V, W)).$$

In dieser Vorlesung brauchen wir lediglich

$$L(V, L(V, W)) \hookrightarrow L(V \otimes V, W).$$

Satz 1.2.11. *Falls $V = W$, so gilt zusätzlich $|v \otimes w| = |w \otimes v|$ für alle $v, w \in V$.*

Satz 1.2.12. *Es seien $V \bar{\otimes} W$ ein weiterer Banachraum und $\bar{\otimes} : V \times W \to V \bar{\otimes} W$ eine weitere stetige bilineare Abbildung, so dass die Eigenschaften aus Satz 1.2.9 erfüllt sind. Dann existiert ein Isomorphismus $\Psi : V \otimes W \to V \bar{\otimes} W$, so dass $\bar{\otimes} = \Psi \circ \otimes$.*

Definition 1.2.13. *Wir nennen den bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten Banachraum $V \otimes W$ das <u>Tensorprodukt</u> aus V und W.*

Definition 1.2.14. *Elemente der Form $v \otimes w \in V \otimes W$ nennen wir <u>Tensoren</u>.*

Bemerkung 1.2.15. *Es gilt $\otimes(V \times W) \subset V \otimes W$.*

Satz 1.2.16. *Es gilt*

$$\overline{\mathrm{lin}}\big(\otimes (V \times W)\big) = V \otimes W.$$

Satz 1.2.17. *Es gibt einen eindeutig bestimmten stetigen linearen Operator $x \mapsto x^*$ aus $L(V \otimes V)$, so dass*

$$(v \otimes w)^* = w \otimes v \quad \textit{für alle } v, w \in V.$$

Außerdem gilt $x^{**} = x$ für alle $x \in V \otimes V$.

Beispiel 1.2.18. *Für $V = \mathbb{R}^m$ ist $V \otimes V = \mathbb{R}^{m \times m}$, und der Operator aus Satz 1.2.17 ist gegeben durch $A \mapsto A^\top$. In der Tat, für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$ gilt*

$$(x \otimes y)^\top = (x \cdot y^\top)^\top = y \cdot x^\top = y \otimes x.$$

Definition 1.2.19. *Es sei $x \in V \otimes V$ beliebig.*

(a) x *heißt* symmetrisch*, falls* $x^* = x$.

(b) x *heißt* antisymmetrisch*, falls* $x^* = -x$.

Lemma 1.2.20. *Für jedes* $x \in V \otimes V$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) x *ist symmetrisch und antisymmetrisch.*

(ii) $x = 0$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Falls x ist symmetrisch und antisymmetrisch ist, so folgt

$$x = x^* = -x.$$

und somit $x = 0$.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Ist klar. $\square$

Definition 1.2.21. *Wir definieren* $\mathrm{Sym}, \mathrm{Anti} : V \otimes V \to V \otimes V$ *durch*

$$\mathrm{Sym}(x) := \frac{1}{2}\big(x + x^*\big).$$
$$\mathrm{Anti}(x) := \frac{1}{2}\big(x - x^*\big).$$

Lemma 1.2.22. *Für jedes* $x \in V \otimes V$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) x *ist symmetrisch.*

(ii) $\mathrm{Sym}(x) = x$.

(iii) $\mathrm{Anti}(x) = 0$*; das heißt* $x \in \ker(\mathrm{Anti})$.

Beweis. Übung. $\square$

Lemma 1.2.23. *Für jedes* $x \in V \otimes V$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) x *ist antisymmetrisch.*

(ii) $\mathrm{Sym}(x) = 0$*; das heißt* $x \in \ker(\mathrm{Sym})$.

(iii) $\mathrm{Anti}(x) = x$.

Beweis. Verläuft analog. $\square$

Satz 1.2.24. Sym *und* Anti *sind stetige lineare Projektionen; das heißt, es gilt* $\mathrm{Sym}, \mathrm{Anti} \in L(V \otimes V)$ *sowie* $\mathrm{Sym} \circ \mathrm{Sym} = \mathrm{Sym}$ *und* $\mathrm{Anti} \circ \mathrm{Anti} = \mathrm{Anti}$.

Beweis. Übung. $\square$

Satz 1.2.25. *Es gilt*

$$V \otimes V = \ker(\mathrm{Anti}) \oplus \ker(\mathrm{Sym}).$$

Mit anderen Worten, jedes $x \in V \otimes V$ besitzt eine eindeutig bestimmte Zerlegung $x = y + z$, wobei y symmetrisch und z antisymmetrisch ist; diese ist gegeben durch

$$x = \mathrm{Sym}(x) + \mathrm{Anti}(x).$$

Beweis. Übung. □

1.3 Grundlagen über stochastische Prozesse

Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 1.3.1. *Eine Familie $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ von Sub-σ-Algebren von $\mathscr{F}$ heißt eine Filtration, falls $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ für alle $0 \leq s \leq t$.*

Definition 1.3.2. *Es sei $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine Filtration. Wir definieren die Familie $\mathbb{F}_+ = (\mathscr{F}_{t+})_{t \in \mathbb{R}_+}$ durch*

$$\mathscr{F}_{t+} := \bigcap_{s > t} \mathscr{F}_s, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Definition 1.3.3. *Es sei $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine Filtration.*

(a) $\mathbb{F}$ heißt rechtsstetig, falls $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+}$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

(b) Ist $\mathbb{F}$ rechtsstetig, so nennen wir $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ eine stochastische Basis.

Von nun an sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ eine stochastische Basis. Weiterhin sei V ein Banachraum (bei uns üblicherweise $V = \mathbb{R}$ oder $V = \mathbb{R}^d$), versehen mit der Borel'schen σ-Algebra $\mathcal{B}(V)$.

Definition 1.3.4. *Eine Prozess (oder, ein V-wertiger Prozess) ist eine Familie $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ von Zufallsvariablen $X_t : \Omega \to V$.*

Definition 1.3.5. *Ein Prozess X heißt stetig, falls für jedes $\omega \in \Omega$ der Pfad*

$$\mathbb{R}_+ \to V, \quad t \mapsto X_t(\omega)$$

stetig ist.

Definition 1.3.6. *Eine Teilmenge $A \subset \Omega$ heißt eine $\mathbb{P}$-Nullmenge, falls ein $N \in \mathscr{F}$ mit $A \subset N$ und $\mathbb{P}(N) = 0$ existiert.*

Definition 1.3.7. *Eine Teilmenge $A \subset \Omega \times \mathbb{R}_+$ heißt eine zufällige Menge.*

Definition 1.3.8.

(a) Eine zufällige Menge A heißt vernachlässigbar, falls

$$\{\omega \in \Omega : (\omega, t) \in A \text{ für ein } t \in \mathbb{R}_+\}$$

eine $\mathbb{P}$-Nullmenge ist.

(b) Zwei Prozesse X und Y heißen ununterscheidbar, falls die zufällige Menge

$$\{X \neq Y\} := \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$$

vernachlässigbar ist.

Definition 1.3.9. *Es seien X und Y zwei Prozesse. Dann heißt X eine Version (oder Modifikation) von Y, falls $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.*

Lemma 1.3.10. *Es seien X und Y zwei ununterscheidbare Prozesse. Dann ist X eine Version von Y.*

Lemma 1.3.11. *Es seien X und Y zwei stetige Prozesse, so dass X eine Version von Y ist. Dann sind X und Y ununterscheidbar.*

Definition 1.3.12. *Ein Prozess X heißt $\mathbb{F}$-adaptiert (oder kurz adaptiert), falls für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ die Zufallsvariable X_t bezüglich $\mathscr{F}_t$ messbar ist.*

Lemma 1.3.13. *Es sei X ein Prozess.*

(a) Die Familie $\mathbb{F}^X = (\mathscr{F}_t^X)_{t \in \mathbb{R}_+}$ definiert durch

$$\mathscr{F}_t^X := \sigma(X_s : s \in [0, t])$$

ist eine Filtration.

(b) X ist $\mathbb{F}^X$-adaptiert.

(c) Ist X adaptiert bezüglich $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, dann gilt $\mathscr{F}_t^X \subset \mathscr{F}_t$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Korollar 1.3.14. *Es sei X ein Prozess. Dann ist $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathbb{F}^X)_+, \mathbb{P})$ eine stochastische Basis, und der Prozess X ist $(\mathbb{F}^X)_+$-adaptiert.*

Definition 1.3.15. *Ein stetiger, adaptierter Prozess W mit $W_0 = 0$ heißt ein $\mathbb{F}$-Wiener-Prozess (oder kurz, ein Wiener-Prozess), falls gilt:*

(i) $W_t - W_s$ und $\mathscr{F}_s$ sind für alle $0 \leq s < t$ unabhängig.

(ii) $W_t - W_s \sim \mathrm{N}(0, t-s)$ *für alle* $0 \leq s < t$.

Definition 1.3.16. *Ein Prozess* B *mit* $B_0 = 0$ *fast sicher heißt eine* *Brown'sche Bewegung, falls gilt:*

(i) *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und alle* $t_0, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$ *mit* $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ *sind die Zufallsvariablen* $B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ *unabhängig.*

(ii) *Es gilt* $B_t - B_s \sim \mathrm{N}(0, t-s)$ *für alle* $0 \leq s < t$.

Satz 1.3.17. *Jede Brown'sche Bewegung* B *mit stetigen Pfaden ist ein* $(\mathbb{F}^B)_+$*-Wiener-Prozess.*

Definition 1.3.18. *Ein Prozess* X *heißt ein* *Gauß'scher Prozess, falls für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und alle* $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$ *mit* $t_1 < \ldots < t_n$ *der Zufallsvektor* $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ *ein Gauß'scher Zufallsvektor ist; das heißt, für jedes* $b \in \mathbb{R}^n$ *ist die Zufallsvariable*

$$\sum_{i=1}^{n} b_i X_{t_i}$$

(möglicherweise entartet) normalverteilt.

Satz 1.3.19. *Für einen Prozess* B *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) B *ist eine Brown'sche Bewegung.*

(ii) B *ist ein Gauß'scher Prozess mit*

$$\mathbb{E}[B_t] = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+,$$
$$\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = s \wedge t \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R}_+.$$

Satz 1.3.20 (Satz von Kolmogorov-Chentsov)**.** *Es sei* X *ein reellwertiger Prozess. Wir nehmen an, dass Konstanten* $\alpha, \beta, C > 0$ *existieren, so dass*

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^\alpha] \leq C|t-s|^{1+\beta} \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R}_+.$$

Dann existiert eine Version Y *von* X*, deren Pfade für jedes* $\gamma \in (0, \frac{\beta}{\alpha})$ *lokal Hölder-stetig der Ordnung* γ *sind.*

Satz 1.3.21. *Es existieren ein Wahrscheinlichkeitsraun* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *und darauf eine Brown'sche Bewegung* B*, deren Pfade für jedes* $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ *lokal Hölder-stetig der Ordnung* γ *sind.*

Definition 1.3.22. *Ein* $\mathbb{R}$*-wertiger adaptierter Prozess* X *heißt ein* $\mathbb{F}$*-Martingal (oder kurz, ein Martingal), falls* $X_t \in \mathscr{L}^1$ *für jedes* $t \in \mathbb{R}_+$ *und*

$$\mathbb{E}[X_t \,|\, \mathcal{F}_s] = X_s \quad \text{für alle } 0 \leq s \leq t.$$

Satz 1.3.23. *Ein Wiener-Prozess W ist ein Martingal.*

Beweis. Für $s \le t$ gilt

$$\mathbb{E}[W_t - W_s \,|\, \mathscr{F}_s] = \mathbb{E}[W_t - W_s] = 0.$$

□

Definition 1.3.24. *Eine Abbildung $\tau : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$ heißt eine $\mathbb{F}$-Stoppzeit (oder kurz, eine Stoppzeit), falls*

$$\{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_t \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Definition 1.3.25. *Für einen Prozess X und eine Stoppzeit τ definieren wir den gestoppten Prozess X^τ durch*

$$X_t^\tau := X_{\tau \wedge t}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Definition 1.3.26. *Ein Prozess X heißt ein lokales Martingal, falls eine Folge $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Stoppzeiten existiert, so dass $\tau_n \uparrow \infty$ fast sicher und M^{τ_n} für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Martingal ist.*

Definition 1.3.27. *Ein Prozess X heißt ein stetiges Semimartingal, falls eine Zerlegung $X = X_0 + M + A$ existiert, so dass:*

(1) X_0 ist $\mathscr{F}_0$-messbar.

(2) M ist ein stetiges lokales Martingal mit $M_0 = 0$.

(3) A ist ein stetiger adaptierter Prozess mit Pfaden von lokal beschränkter Variation, so dass $A_0 = 0$.

In diesem Fall nennen wir $X = X_0 + M + A$ eine Semimartingal-Zerlegung von X.

Satz 1.3.28. *Es sei X ein stetiges Semimartingal mit Zerlegungen $X = X_0 + M + A$ und $X = X_0 + N + B$. Dann gilt $M = N$ und $A = B$ bis auf Ununterscheidbarkeit.*

Definition 1.3.29.

(a) Wir definieren die previsible σ-Algebra $\mathcal{P}$ über $\Omega \times \mathbb{R}_+$ durch

$$\mathcal{P} := \sigma\big(\{A \times \{0\} : A \in \mathscr{F}_0\} \cup \{A \times (s,t] : s < t \text{ und } A \in \mathscr{F}_s\}\big).$$

(b) Ein $\mathcal{P}$-messbarer Prozess X heißt ein previsibler Prozess.

Lemma 1.3.30. *Jeder stetige, adaptierte Prozess ist previsibel.*

Bemerkung 1.3.31. *Wir definieren das* <u>*stochastische Integral*</u> *(auch* <u>*Itô-Integral*</u> *genannt)*

$$H \cdot W = \left(\int_0^t H_s dW_s \right)_{t \in \mathbb{R}_+}$$

wie folgt:

(1) Für jeden einfache Integranden H setzen wir

$$H \cdot W := \begin{cases} 0, & \textit{falls } H = \mathbb{1}_{A \times \{0\}} \textit{ mit } A \in \mathscr{F}_0, \\ \mathbb{1}_A (W^t - W^s), & \textit{falls } H = \mathbb{1}_{A \times (s,t]} \textit{ mit } A \in \mathscr{F}_s. \end{cases}$$

(2) Fortsetzungsargument für stetige lineare Operatoren: Für jeden previsiblen Prozess H mit

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |H_s|^2 ds \right] < \infty \quad \textit{für alle } T \in \mathbb{R}_+.$$

Dann gilt die Itô-Isometrie

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_s dW_s \right)^2 \right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T |H_s|^2 ds \right] \quad \textit{für alle } T \in \mathbb{R}_+.$$

(3) <u>*Lokalisierung:*</u> *Fortsetzung für jeden previsiblen Prozess H mit*

$$\int_0^T |H_s|^2 ds < \infty \quad \mathbb{P}\textit{-fast sicher für alle } T \in \mathbb{R}_+.$$

Bemerkung 1.3.32. *Das Itô-Integral $H \cdot X$ kann allgemeiner bezüglich eines Semimartingals X definiert werden.*

Definition 1.3.33. *Ein Prozess W heißt ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Wiener-Prozess, falls die Komponenten $W^1, \dots, W^d$ unabhängige Wiener-Prozesse (im Sinne von Definition 1.3.15) sind.*

Definition 1.3.34. *Es seien W ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Wiener-Prozess, und H ein $\mathbb{R}^d$-wertiger previsibler Prozess mit*

$$\int_0^T |H_s|^2 ds < \infty \quad \mathbb{P}\textit{-fast sicher für alle } T \in \mathbb{R}_+$$

Wir definieren den $\mathbb{R}^{d\times d}$-wertigen Prozess

$$H \otimes W = \left(\int_0^t H_s \otimes dW_s \right)_{t\in\mathbb{R}_+}$$

durch

$$\left(\int_0^t H_s \otimes dW_s \right)_{ij} := \int_0^t H_s^i dW_s^j, \quad i,j = 1,\dots,d.$$

Definition 1.3.35. *Es seien X und Y zwei stetige Semimartingale.*

(a) Die quadratische Kovariation von X und Y ist definiert durch

$$[X,Y] := XY - X_0Y_0 - X\cdot Y - Y\cdot X.$$

(b) Wir nennen $[X,X]$ die quadratische Variation von X.

Definition 1.3.36. *Für zwei stetige Semimartingale X und Y ist das Stratonovich-Integral*

$$X \circ Y = \left(\int_0^t X_s \circ dY_s \right)_{t\in\mathbb{R}_+}$$

definiert durch

$$\int_0^t X_s \circ dY_s := \int_0^t X_s dY_s + \frac{1}{2}[X,Y]_t, \quad t\in\mathbb{R}_+.$$

Satz 1.3.37. *Für zwei stetige Semimartingale X und Y gilt*

$$XY = X_0Y_0 + X\circ Y + Y\circ X.$$

Definition 1.3.38. *Es seien W ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Wiener-Prozess, und X ein $\mathbb{R}^d$-wertiges stetiges Semimartingal mit*

$$\int_0^T |X_s|^2 ds < \infty \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher für alle } T\in\mathbb{R}_+.$$

Wir definieren den $\mathbb{R}^{d\times d}$-wertigen Prozess

$$X \otimes \circ W = \left(\int_0^t X_s \otimes \circ dW_s \right)_{t\in\mathbb{R}_+}$$

durch

$$\left(\int_0^t X_s \otimes \circ dW_s \right)_{ij} := \int_0^t X_s^i \circ dW_s^j, \quad i,j = 1,\dots,d.$$

Kapitel 2

Räume rauher Pfade

Es sei V ein Banachraum, und es sei $T \in \mathbb{R}_+$ beliebig.

2.1 Hölder-rauhe Pfade

Definition 2.1.1. *Für eine Funktion $X : [0,T] \to V$ vereinbaren wir die Notation*

$$X_{s,t} := X_t - X_s, \quad s,t \in [0,T].$$

Definition 2.1.2. *Für $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ vereinbaren wir die Kurznotationen*

$$\mathcal{C}^\alpha := C^\alpha([0,T], V) \quad \text{und} \quad \mathcal{C}_2^{2\alpha} := C^{2\alpha}([0,T]^2, V \otimes V).$$

Definition 2.1.3. *Es sei $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ beliebig. Wir definieren den Raum $\mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$ aller <u>α-Hölder-rauhen Pfade</u> (über V) als die Menge aller Paare $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X})$ bestehend aus Funktionen $X : [0,T] \to V$ und $\mathbb{X} : [0,T]^2 \to V \otimes V$, so dass*

$$\|X\|_\alpha := \sup_{\substack{s,t \in [0,T] \\ s \neq t}} \frac{|X_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} < \infty,$$

$$\|\mathbb{X}\|_{2\alpha} := \sup_{\substack{s,t \in [0,T] \\ s \neq t}} \frac{|\mathbb{X}_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}} < \infty,$$

und die Chen-Gleichung

$$\mathbb{X}_{s,t} - \mathbb{X}_{s,u} - \mathbb{X}_{u,t} = X_{s,u} \otimes X_{u,t} \quad \text{für alle } s,u,t \in [0,T]$$

erfüllt ist. Wir benutzen auch die Kurznotationen $\mathscr{C}^\alpha$.

Definition 2.1.4. *Für einen rauhen Pfad $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ nennen wir $\mathbb{X}$ einen <u>Prozess 2. Ordnung</u>.*

Bemerkung 2.1.5.

(a) $\mathscr{C}^\alpha$ *ist kein Vektorraum.*

(b) *Es gilt* $\mathscr{C}^\alpha \subset \mathcal{C}^\alpha \oplus \mathcal{C}_2^{2\alpha}$.

(c) *Für* $\alpha \leq \beta$ *gilt* $\mathscr{C}^\beta \subset \mathscr{C}^\alpha$.

Bemerkung 2.1.6. *Es sei* $X \in \mathcal{C}^\alpha$ *für ein* $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$. *Man kann Folgendes zeigen:*

(a) *Falls* $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, *dann existiert ein* $\mathbb{X} \in \mathcal{C}_2^{2\alpha}$, *so dass* $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$.

(b) *Falls* $\alpha = \frac{1}{2}$, *so existiert ein Gegenbeispiel mit* $\dim V = \infty$.

(c) *Falls* $\dim V < \infty$, *so existiert stets ein* $\mathbb{X} \in \mathcal{C}_2^{2\alpha}$ *mit* $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$.

Lemma 2.1.7. *Es sei* $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ *ein rauher Pfad.*

(a) *Es gilt* $\mathbb{X}_{t,t} = 0$ *für alle* $t \in [0, T]$.

(b) *Es gilt* $\mathbb{X}_{s,t} = X_{s,t} \otimes X_{s,t} - \mathbb{X}_{t,s}$ *für alle* $s, t \in [0, T]$.

(c) *Es gilt* $\mathbb{X}_{s,t} = \mathbb{X}_{0,t} - \mathbb{X}_{0,s} - X_{0,s} \otimes X_{s,t}$ *für alle* $s, t \in [0, T]$.

(d) *Es sei* $\mathbf{Y} = (Y, \mathbb{Y}) \in \mathscr{C}^\alpha$ *ein weiterer rauher Pfad, so dass* $(X_t, \mathbb{X}_{0,t}) = (Y_t, \mathbb{Y}_{0,t})$ *für alle* $t \in [0, T]$. *Dann gilt* $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$.

(e) *Für alle* $0 \leq s = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = t$ *gilt*

$$\begin{aligned}
\mathbb{X}_{s,t} &= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{X}_{\tau_i,\tau_{i+1}} + \sum_{\substack{j,i=0\\ j<i}}^{N-1} X_{\tau_j,\tau_{j+1}} \otimes X_{\tau_i,\tau_{i+1}} \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \big(\mathbb{X}_{\tau_i,\tau_{i+1}} + X_{s,\tau_i} \otimes X_{\tau_i,\tau_{i+1}} \big).
\end{aligned}$$

Beweis. Übung. □

Lemma 2.1.8. *Es seien* $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ *und* $F \in C^{2\alpha}([0, T], V \otimes V)$. *Wir definieren* $\bar{\mathbb{X}} \in \mathcal{C}_2^{2\alpha}$ *durch*

$$\bar{\mathbb{X}}_{s,t} := \mathbb{X}_{s,t} + F_t - F_s, \quad s, t \in [0, T].$$

Dann gilt $(X, \bar{\mathbb{X}}) \in \mathscr{C}^\alpha$.

Beweis. Übung. □

Lemma 2.1.9. *Es seien $X \in \mathcal{C}^\alpha$ und $\mathbb{X}, \bar{\mathbb{X}} \in \mathcal{C}_2^{2\alpha}$, so dass $(X, \mathbb{X}), (X, \bar{\mathbb{X}}) \in \mathscr{C}^\alpha$. Dann existiert eine Funktion $F \in C^{2\alpha}([0,T], V \otimes V)$, so dass*

$$\bar{\mathbb{X}}_{s,t} = \mathbb{X}_{s,t} + F_t - F_s, \quad s, t \in [0,T].$$

Beweis. Übung. □

Satz 2.1.10. *Es sei $X \in C^1([0,T], V)$. Wir definieren $\mathbb{X}$ durch*

$$\mathbb{X}_{s,t} := \int_s^t X_{s,r} \otimes \dot{X}_r \, dr, \quad s, t \in [0,T].$$

Dann gilt $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ für jedes $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$.

Beweis. Übung. □

Definition 2.1.11. *Wir definieren auf $\mathscr{C}^\alpha$ die Rauhe-Pfade-Norm*

$$|||\mathbf{X}|||_\alpha := \|X\|_\alpha + \sqrt{\|\mathbb{X}\|_{2\alpha}}.$$

Bemerkung 2.1.12. *Selbstverständlich handelt es sich hierbei um keine Norm im üblichen Sinne. In der Situation von Satz 2.1.10 gilt jedoch $(\lambda X, \lambda^2 \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$. Setzen wir $\lambda\mathbf{X} := (\lambda X, \lambda^2 \mathbb{X})$, so folgt*

$$|||\lambda\mathbf{X}|||_\alpha = |\lambda| \cdot |||\mathbf{X}\,|||_\alpha\,.$$

Lemma 2.1.13. *Der Raum $\mathcal{C}^\alpha \oplus \mathcal{C}_2^{2\alpha}$ versehen mit*

$$\|\mathbf{X}\|^* = \|X\|_\alpha + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}$$

ist ein vollständiger halbnormierter Raum, und versehen mit

$$\|\mathbf{X}\| = |X_0| + \|X\|_\alpha + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}$$

ein Banachraum.

Beweis. Aus Beispiel 1.1.21 folgt, dass $\|\cdot\|^*$ eine Halbnorm auf $\mathcal{C}^\alpha \oplus \mathcal{C}_2^{2\alpha}$ ist. Es sei $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathcal{C}^\alpha \oplus \mathcal{C}_2^{2\alpha}$, so dass $\|\mathbf{X}\| = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} X_0 &= 0, \\ X_t - X_0 &= 0, \quad t \in [0,T], \\ \mathbb{X}_{s,t} &= 0, \quad s, t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Also folgt $\mathbf{X} = 0$. □

Bemerkung 2.1.14. *Aus* $\|\mathbf{X}^n - \mathbf{X}\| \to 0$ *folgt* $\mathbf{X}^n \to \mathbf{X}$ *punktweise.*

Definition 2.1.15. *Wir definieren auf* $\mathscr{C}^\alpha$ *die* <u>α*-Hölder-rauhe-Pfade-Metrik*</u>

$$\varrho_\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \|X - Y\|_\alpha + \|\mathbb{X} - \mathbb{Y}\|_{2\alpha}$$

für zwei rauhe Pfade $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X})$ *und* $\mathbf{Y} = (Y, \mathbb{Y})$.

Satz 2.1.16. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(a) ϱ_α *ist eine Halbmetrik auf* $\mathscr{C}^\alpha$.

(b) $\mathscr{C}^\alpha$ *ist ein vollständiger metrischer Raum mit der Metrik*

$$d_\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = |X_0 - Y_0| + \varrho_\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

Beweis. (a) Folgt aus Lemma 2.1.13 und Beispiel 1.1.16.
(b) Aus Lemma 2.1.13 und Beispiel 1.1.16 folgt, dass $(\mathscr{C}^\alpha, d_\alpha)$ ein metrischer Raum ist. Es sei $(\mathbf{X}^n)_{n\in\mathbb{N}} = (X^n, \mathbb{X}^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{C}^\alpha$ eine Folge, so dass $d_\alpha(\mathbf{X}^n, \mathbf{X}) \to 0$ für ein $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathcal{C}^\alpha \oplus \mathcal{C}_2^{2\alpha}$. Nach Bemerkung 2.1.14 gilt $\mathbf{X}^n \to \mathbf{X}$ punktweise. Da $\otimes$ ein stetiger bilinearer Operator ist, folgt für alle $s, u, t \in [0, T]$, dass

$$\begin{aligned}\mathbb{X}_{s,t} - \mathbb{X}_{s,u} - \mathbb{X}_{u,t} &= \lim_{n\to\infty} \left(\mathbb{X}^n_{s,t} - \mathbb{X}^n_{s,u} - \mathbb{X}^n_{u,t}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(X^n_{s,u} \otimes X^n_{u,t}\right) = X_{s,u} \otimes X_{u,t},\end{aligned}$$

und damit $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^\alpha$. □

Bemerkung 2.1.17. *Folglich ist* $(\mathscr{C}^\alpha, \varrho_\alpha)$ *ein vollständiger halbmetrischer Raum. Für eine konvergente Folge* $(\mathbf{X}^n)_{n\in\mathbb{N}} = (X^n, \mathbb{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und zwei Grenzwerte* $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X})$ *und* $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{X}, \bar{\mathbb{X}})$ *gilt* $\mathbb{X} = \bar{\mathbb{X}}$, *und es existiert ein* $c \in \mathbb{R}$, *so dass* $X - \bar{X} = c$.

Satz 2.1.18. *Es seien* $\frac{1}{3} < \alpha < \beta \leq \frac{1}{2}$. *Es sei* $\mathbf{X}^n = (X^n, \mathbb{X}^n)$, $n \in \mathbb{N}$ *eine Folge aus* $\mathscr{C}^\beta \subset \mathscr{C}^\alpha$, *so dass*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|X^n\|_\beta < \infty \quad \text{und} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mathbb{X}^n\|_{2\beta} < \infty.$$

Weiterhin sei $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X})$, *so dass*

$$X^n_{0,t} \to X_{0,t} \quad \text{und} \quad \mathbb{X}^n_{0,t} \to \mathbb{X}_{0,t} \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Dann gilt $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^\beta \subset \mathscr{C}^\alpha$ *und* $\varrho_\alpha(\mathbf{X}^n, \mathbf{X}) \to 0$.

Bemerkung 2.1.19. *Gilt* $X^n_0 = 0$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$, *und* $X_0 = 0$, *so gilt*

$$\varrho_\alpha(\mathbf{X}^n, \mathbf{X}) \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad d_\alpha(\mathbf{X}^n, \mathbf{X}) \to 0.$$

2.2 Geometrische rauhe Pfade

Satz 2.2.1. *Es sei $X : [0,T] \to V$ stetig und von beschränkter Variation. Wir definieren $\mathbb{X}$ durch*

$$\mathbb{X}_{s,t} := \int_s^t X_{s,r} \otimes dX_r, \quad s,t \in [0,T].$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es gilt partielle Integration

$$\mathrm{Sym}\left(\int_s^t X_r \otimes dX_r\right) = \frac{1}{2}\big(X_t \otimes X_t - X_s \otimes X_s\big), \quad s,t \in [0,T].$$

(ii) Es gilt

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{X}_{s,t}) = \frac{1}{2} X_{s,t} \otimes X_{s,t}, \quad s,t \in [0,T].$$

Beweis. Übung. □

Wir merken an, dass in Satz 2.2.1 nicht vorausgesetzt wird, dass die Chen-Gleichung gilt. Die $V \otimes V$-wertigen Integrale sind im Sinne

$$\int_s^t Y_r \otimes dX_r = \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{[u,v] \in \Pi} Y_u \otimes X_{u,v}$$

zu verstehen.

Bemerkung 2.2.2. *Falls $V = \mathbb{R}^d$, so bedeutet partielle Integration gerade*

$$\int_s^t X_r^i \, dX_r^j + \int_s^t X_r^j \, dX_r^i = X_t^i X_t^j - X_s^i X_s^j, \quad i,j = 1, \ldots, d.$$

Definition 2.2.3. *Wir definieren den Raum $\mathscr{C}_g^\alpha \subset \mathscr{C}^\alpha$ der <u>geometrischen rauhen Pfade</u> durch*

$$\mathscr{C}_g^\alpha := \left\{ (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha : \mathrm{Sym}(\mathbb{X}_{s,t}) = \frac{1}{2} X_{s,t} \otimes X_{s,t} \text{ für alle } s,t \in [0,T] \right\}.$$

Lemma 2.2.4. *$\mathscr{C}_g^\alpha$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathscr{C}^\alpha$.*

Beweis. Es seien $(\mathbf{X}^n)_{n\in\mathbb{N}} = (X^n, \mathbb{X}^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{C}_g^\alpha$ eine Folge und $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$, so dass $d_\alpha(\mathbf{X}^n, \mathbf{X}) \to 0$. Nach Bemerkung 2.1.14 gilt $\mathbf{X}^n \to \mathbf{X}$ punktweise. Da Sym und $\otimes$ ein stetige Operatoren sind, folgt für alle $s, t \in [0, T]$, dass

$$\begin{aligned}\mathrm{Sym}(\mathbb{X}_{s,t}) &= \mathrm{Sym}\Big(\lim_{n\to\infty} \mathbb{X}_{s,t}^n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Sym}(\mathbb{X}_{s,t}^n) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\big(X_{s,t}^n \otimes X_{s,t}^n\big) = \frac{1}{2} X_{s,t} \otimes X_{s,t}.\end{aligned}$$

Also gilt $\mathbf{X} \in \mathscr{C}_g^\alpha$. □

Definition 2.2.5. *Wir definieren den Raum $\mathscr{C}_g^{0,\alpha} \subset \mathscr{C}^\alpha$ durch*

$$\mathscr{C}_g^{0,\alpha} := \overline{\{(X, \mathbb{X}) : X \in C^1\}}^{d_\alpha},$$

wobei $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ wie in Satz 2.1.10 jeweils gegeben ist durch

$$\mathbb{X}_{s,t} := \int_s^t X_{s,r} \otimes \dot{X}_r \, dr, \quad s, t \in [0, T].$$

Lemma 2.2.6. *Es gilt $\mathscr{C}_g^{0,\alpha} \subset \mathscr{C}_g^\alpha$.*

Beweis. Es sei $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ mit $X \in C^1$ beliebig. Weiterhin seien $s, t \in [0, T]$ beliebig. Dann gilt

$$\mathbb{X}_{s,t} = \int_s^t X_{s,r} \otimes dX_r.$$

Außerdem gilt partielle Integration, denn

$$\begin{aligned}\mathrm{Sym}\Big(\int_s^t X_r \otimes dX_r\Big) &= \mathrm{Sym}\Big(\int_s^t X_r \otimes \dot{X}_r \, dr\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\int_s^t X_r \otimes \dot{X}_r \, dr + \int_s^t \dot{X}_r \otimes X_r \, dr\Big) \\ &= \frac{1}{2}\big(X_t \otimes X_t - X_s \otimes X_s\big),\end{aligned}$$

Nach Satz 2.2.1 folgt

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{X}_{s,t}) = \frac{1}{2} X_{s,t} \otimes X_{s,t}, \quad s, t \in [0, T],$$

und somit $\mathbf{X} \in \mathscr{C}_g^\alpha$. Also haben wir gezeigt, dass

$$\{(X, \mathbb{X}) : X \in C^1\} \subset \mathscr{C}_g^\alpha.$$

Da $\mathscr{C}_g^\alpha$ nach Lemma 2.2.4 eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathscr{C}^\alpha$ ist, folgt $\mathscr{C}_g^{0,\alpha} \subset \mathscr{C}_g^\alpha$. □

Satz 2.2.7 (Leibnizregel)**.** *Es seien V, W, X, Y Banachräume und $U \subset V$ eine offene Menge. Weiterhin seien $f \in C^1(U, W)$, $g \in C^1(U, X)$ und $B \in L^{(2)}(W \times X, Y)$. Dann gilt $B(f, g) \in C^1(U, Y)$ mit*

$$D(B(f,g))(x)v = B(Df(x)v, g(x)) + B(f(x), Dg(x)v), \quad x \in U \text{ und } v \in V.$$

Beweis. Siehe [AMR88, Theorem 2.4.4]. $\square$

Korollar 2.2.8. *Es sei $f \in C^1([0,T], V)$. Dann gilt $f \otimes f \in C^1([0,T], V \otimes V)$ mit*

$$(f \otimes f)'(t) = f'(t) \otimes f(t) + f(t) \otimes f'(t), \quad t \in [0,T].$$

Kapitel 3

Die Brown'sche Bewegung als rauher Pfad

Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

3.1 Der Satz von Kolmogorov-Chentsov für rauhe Pfade

Es sei V ein Banachraum, und es sei $T \in \mathbb{R}_+$.

Satz 3.1.1 (Satz von Kolmogorov-Chentsov)**.** *Es sei $X : [0,T] \to V$ ein Prozess. Wir nehmen an, dass Konstanten $q, \delta, K > 0$ existieren, so dass*

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^q] \leq K|t-s|^{1+\delta} \quad \textit{für alle } s,t \in [0,T].$$

Dann existieren zu jedem $\alpha \in (0, \frac{\delta}{q})$ eine Zufallsvariable L und eine Version Y von X, so dass

$$|Y_t - Y_s| \leq L|t-s|^{\alpha} \quad \textit{für alle } s,t \in [0,T].$$

Falls $q \geq 1$, so können wir $L \in \mathscr{L}^q$ wählen.

Lemma 3.1.2. *Es seien $q, \beta > 0$ und $\delta > -1$, so dass*

$$\delta = q\beta - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \frac{\delta + 1}{q}.$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es existiert eine Konstante $K > 0$, so dass

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^q] \leq K|t-s|^{1+\delta} \quad \textit{für alle } s,t \in [0,T].$$

(ii) Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\mathbb{E}\big[|X_t - X_s|^q\big]^{1/q} \le C|t-s|^\beta \quad \textit{für alle } s,t \in [0,T].$$

In diesem Fall gilt

$$\frac{\delta}{q} = \beta - \frac{1}{q},$$

und es gelten die Äquivalenzen

$$\delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad q\beta > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\delta}{q} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta - \frac{1}{q} > 0.$$

Satz 3.1.3 (Satz von Kolmogorov-Chentsov für rauhe Pfade)**.** *Es sei $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X})$ ein Prozess, so dass die Chen-Gleichung erfüllt ist, und es seien $q \ge 2$ und $\beta > \frac{1}{q}$ beliebig. Wir nehmen an, dass eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass*

$$\begin{aligned} |X_{s,t}|_{\mathscr{L}^q} &\le C|t-s|^\beta \quad \textit{für alle } s,t \in [0,T], \\ |\mathbb{X}_{s,t}|_{\mathscr{L}^{q/2}} &\le C|t-s|^{2\beta} \quad \textit{für alle } s,t \in [0,T]. \end{aligned}$$

(a) Zu jedem $\alpha \in (0, \beta - \frac{1}{q})$ existieren eine Version von $(X, \mathbb{X})$ – wieder als $(X, \mathbb{X})$ bezeichnet – und Zufallsvariablen $K_\alpha \in \mathscr{L}^q$ und $\mathbb{K}_\alpha \in \mathscr{L}^{q/2}$, so dass

$$\begin{aligned} |X_{s,t}| &\le K_\alpha |t-s|^\alpha \quad \textit{für alle } s,t \in [0,T], \\ |\mathbb{X}_{s,t}| &\le \mathbb{K}_\alpha |t-s|^{2\alpha} \quad \textit{für alle } s,t \in [0,T]. \end{aligned}$$

(b) Falls $\beta - \frac{1}{q} > \frac{1}{3}$, dann gilt $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ für jedes $\alpha \in (\frac{1}{3}, \beta - \frac{1}{q})$ mit $\alpha \le \frac{1}{2}$.

Beweis. ObdA dürfen wir annehmen, dass $T = 1$. Wir setzen

$$D_n = \{k2^{-n} : k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

und $D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$. Es genügt, die Abschätzungen für alle $s, t \in D$ zu beweisen. Wir beachten, dass $\#D_n = 2^n$ und $|D_n| = 2^{-n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die nichtnegativen Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} K_n &:= \sup_{t \in D_n} |X_{t,t+2^{-n}}|, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \mathbb{K}_n &:= \sup_{t \in D_n} |\mathbb{X}_{t,t+2^{-n}}|, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung folgt

$$\mathbb{E}[K_n^q] \le \mathbb{E}\Bigg[\sum_{t \in D_n} |X_{t,t+2^{-n}}|^q\Bigg] = \sum_{t \in D_n} |X_{t,t+2^{-n}}|^q_{\mathscr{L}^q} \le \#D_n \big(C|D_n|^\beta\big)^q = C^q |D_n|^{\beta q - 1}$$

und

$$\mathbb{E}[\mathbb{K}_n^{q/2}] \le \mathbb{E}\Bigg[\sum_{t\in D_n} |\mathbb{X}_{t,t+2^{-n}}|^{q/2}\Bigg] = \sum_{t\in D_n} |\mathbb{X}_{t,t+2^{-n}}|^{q/2}_{\mathscr{L}^{q/2}}$$
$$\le \#D_n\big(C|D_n|^{2\beta}\big)^{q/2} = C^{q/2}|D_n|^{\beta q-1}.$$

Es seien $s, t \in D$ mit $s < t$ beliebig. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$|D_{m+1}| < t - s \le |D_m|.$$

Es existieren ein $N \in \mathbb{N}$ und

$$s = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = t,$$

so dass

$$[s,t) = \bigcup_{i=0}^{N-1} [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

wobei zu jedem $i \in \{0, \ldots, N-1\}$ ein $n \ge m+1$ existiert, so dass $\tau_i, \tau_{i+1} \in D_n$, und zu jedem $n \ge m+1$ höchstens zwei Intervalle mit Punkten aus D_n existieren. Es folgt

$$|X_{s,t}| \le \max_{i=0,\ldots,N-1} |X_{s,\tau_{i+1}}| \le \sum_{i=0}^{N-1} |X_{\tau_i,\tau_{i+1}}| \le 2 \sum_{n\ge m+1} K_n.$$

Wir definieren die nichtnegative Zufallsvariable

$$K_\alpha := 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n}{|D_n|^\alpha}.$$

Wegen $\alpha < \beta - \frac{1}{q}$ gilt (geometrische Reihe)

$$|K_\alpha|_{\mathscr{L}^q} \le 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|D_n|^\alpha}\mathbb{E}[K_n^q]^{1/q} \le 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C}{|D_n|^\alpha}|D_n|^{\beta-\frac{1}{q}} < \infty,$$

und damit $K_\alpha \in \mathscr{L}^q$. Weiterhin gilt

$$\frac{|X_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} \le 2\sum_{n\ge m-1} \frac{K_n}{|D_{m+1}|^\alpha} \le 2\sum_{n\ge m-1} \frac{K_n}{|D_n|^\alpha} = K_\alpha.$$

Nach Lemma 2.1.7(e) gilt

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{X}_{s,t}| &= \left| \sum_{i=0}^{N-1} \left(\mathbb{X}_{\tau_i,\tau_{i+1}} + X_{s,\tau_i} \otimes X_{\tau_i,\tau_{i+1}} \right) \right| \leq \sum_{i=0}^{N-1} \left(|\mathbb{X}_{\tau_i,\tau_{i+1}}| + |X_{s,\tau_i}| \, |X_{\tau_i,\tau_{i+1}}| \right) \\
&\leq \sum_{i=0}^{N-1} |X_{\tau_i,\tau_{i+1}}| + \max_{i=0,\dots,N-1} |X_{s,\tau_i}| \sum_{j=0}^{N-1} |X_{\tau_j,\tau_{j+1}}| \\
&\leq 2 \sum_{n \geq m+1} \mathbb{K}_n + \left(2 \sum_{n \geq m+1} K_n \right)^2.
\end{aligned}
$$

Wir definieren die nichtnegative Zufallsvariable

$$
\mathbb{K}_\alpha := 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{K}_n}{|D_n|^{2\alpha}}.
$$

Wegen $\alpha < \beta - \frac{1}{q}$ gilt (geometrische Reihe)

$$
|\mathbb{K}_\alpha|_{\mathscr{L}^{q/2}} \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|D_n|^{2\alpha}} \mathbb{E}\big[\mathbb{K}_n^{q/2}\big]^{2/q} \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C}{|D_n|^{2\alpha}} |D_n|^{2\beta - \frac{2}{q}} < \infty,
$$

und damit $\mathbb{K}_\alpha \in \mathscr{L}^{q/2}$. Weiterhin gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{|\mathbb{X}_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}} &\leq 2 \sum_{n \geq m-1} \frac{\mathbb{K}_n}{|D_{m+1}|^{2\alpha}} + \left(2 \sum_{n \geq m-1} \frac{K_n}{|D_{m+1}|^{\alpha}} \right)^2 \\
&\leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{K}_n}{|D_n|^{2\alpha}} + \left(2 \sum_{n \geq m-1} \frac{K_n}{|D_n|^{\alpha}} \right)^2 = \mathbb{K}_\alpha + K_\alpha^2.
\end{aligned}
$$

□

Satz 3.1.4. *Es sein* $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X})$ *und* $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}, \tilde{\mathbb{X}})$ *zwei Prozesse, die die Chen-Gleichung erfüllen, und es seien* $q \geq 2$ *und* $\beta > \frac{1}{q}$ *Konstanten. Wir nehmen an, dass eine Konstante* $C > 0$ *existiert, so dass*

$$
\begin{aligned}
|X_{s,t}|_{\mathscr{L}^q} &\leq C|t-s|^{\beta}, \quad s,t \in [0,T], \\
|\mathbb{X}_{s,t}|_{\mathscr{L}^{q/2}} &\leq C|t-s|^{2\beta}, \quad s,t \in [0,T], \\
|\tilde{X}_{s,t}|_{\mathscr{L}^q} &\leq C|t-s|^{\beta}, \quad s,t \in [0,T], \\
|\tilde{\mathbb{X}}_{s,t}|_{\mathscr{L}^{q/2}} &\leq C|t-s|^{2\beta}, \quad s,t \in [0,T].
\end{aligned}
$$

Wir setzen

$$
\Delta X := \tilde{X} - X \quad \textit{und} \quad \Delta \mathbb{X} := \tilde{\mathbb{X}} - \mathbb{X},
$$

und nehmen an, dass ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass

$$|\Delta X_{s,t}|_{\mathscr{L}^q} \leq C\epsilon|t-s|^{\beta}, \quad s,t \in [0,T],$$
$$|\Delta \mathbb{X}_{s,t}|_{\mathscr{L}^{q/2}} \leq C\epsilon|t-s|^{2\beta}, \quad s,t \in [0,T].$$

(a) Es existiert eine Konstante $M > 0$, so dass

$$|\,\|\Delta X\|_{\alpha}|_{\mathscr{L}^q} \leq M\epsilon \quad \text{und} \quad |\,\|\Delta \mathbb{X}\|_{2\alpha}|_{\mathscr{L}^{q/2}} \leq M\epsilon.$$

(b) Es gelte $\beta - \frac{1}{q} > \frac{1}{3}$, und es sei $\alpha \in (\frac{1}{3}, \beta - \frac{1}{q})$ mit $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Dann gilt $|||\mathbf{X}|||_{\alpha}, |||\tilde{\mathbf{X}}|||_{\alpha} \in \mathscr{L}^q$ und

$$|\varrho_{\alpha}(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})|_{\mathscr{L}^q} \leq M\epsilon.$$

3.2 Die Itô-Brown'sche Bewegung als rauher Pfad

Es sei B eine $\mathbb{R}^d$-wertige Brown'sche Bewegung. Im Folgenden ist $V = \mathbb{R}^d$.

Definition 3.2.1. *Wir definieren $\mathbb{B} = \mathbb{B}^{\text{Itô}}$ durch*

$$\mathbb{B}_{s,t} := \int_s^t B_{s,r} \otimes dB_r \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^{d \times d}, \quad s,t \in [0,T].$$

Weiterhin definieren wir $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\text{Itô}}$ durch $\mathbf{B} := (B, \mathbb{B})$.

Lemma 3.2.2. *Für alle $s,t \in [0,T]$ gilt*

$$\mathbb{B}_{s,t} = \mathbb{B}_{0,t} - \mathbb{B}_{0,s} - B_s \otimes B_{s,t}.$$

Beweis. Übung. □

Satz 3.2.3. *Der Prozess $\mathbf{B}$ erfüllt die Chen-Gleichung.*

Beweis. Übung. □

Lemma 3.2.4. *Es sei $X \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$. Für jedes $q \in [1, \infty)$ gilt $|X|_{\mathscr{L}^q} = c_q\sigma$, wobei*

$$c_q = \sqrt{2}\left(\frac{\Gamma(\frac{q+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right)^{1/q}.$$

Lemma 3.2.5. *Es sei B eine $\mathbb{R}$-wertige Brown'sche Bewegung. Für jedes $p \in [2, \infty)$ und jeden previsiblen Prozess H mit*

$$\int_0^T \mathbb{E}[H_s^2]ds < \infty$$

gilt

$$\left| \int_0^T H_s dB_s \right|_{\mathscr{L}^p} \leq C_p \Big(\int_0^T \mathbb{E}[H_s^2]ds \Big)^{1/2},$$

wobei

$$C_p = \left(\frac{p(p-1)}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{p/2}.$$

Satz 3.2.6. *Für jedes $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ gilt $\mathbb{P}$-fast sicher $\mathbf{B} \in \mathscr{C}^\alpha$.*

Beweis. Es sei $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ beliebig. Wir wählen $\beta = \frac{1}{2}$ und $q > 6$ beliebig. Dann gilt $\frac{1}{2} - \frac{1}{q} > \frac{1}{3}$. Es seien $s, t \in [0, T]$ mit $s \leq t$ beliebig. Weiterhin sei $i \in \{1, \dots, d\}$ beliebig. Dann gilt $B_{s,t}^i \sim \mathrm{N}(0, t-s)$. Nach Lemma 3.2.4 folgt

$$|B_{s,t}^i|_{\mathscr{L}^q} = c_q |t-s|^{1/2} = c_q |t-s|^\beta.$$

Nun seien $i, j \in \{1, \dots, d\}$ beliebig. Dann gilt mit Lemma 3.2.5

$$\begin{aligned} |\mathbb{B}_{s,t}^{ij}|_{\mathscr{L}^{q/2}} &= \left| \int_s^t (B_r^i - B_s^i) dB_r^j \right|_{L^{q/2}} \leq C_{q/2} \Big(\int_s^t \mathbb{E}\big[|B_r^i - B_s^i|^2\big] dr \Big)^{1/2} \\ &= C_{q/2} \Big(\int_s^t (r-s) dr \Big)^{1/2} = C_{q/2} \Big(\frac{(t-s)^2}{2} \Big)^{1/2} = \frac{C_{q/2}}{\sqrt{2}} |t-s| = \frac{C_{q/2}}{\sqrt{2}} |t-s|^{2\beta}. \end{aligned}$$

Also folgt nach Satz 3.1.3, dass $\mathbb{P}$-fast sicher $\mathbf{B} \in \mathscr{C}^\alpha$. $\square$

Lemma 3.2.7. *Für alle $t \in [0, T]$ gilt*

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{B}_{0,t}) = \frac{1}{2} \big(B_t \otimes B_t - t \cdot \mathrm{Id} \big).$$

Beweis. Übung. $\square$

Satz 3.2.8. *Es gilt*

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{B}_{s,t}) = \frac{1}{2} B_{s,t} \otimes B_{s,t} - \frac{t-s}{2} \mathrm{Id} \quad \textit{für alle } s, t \in [0, T].$$

Beweis. Übung. $\square$

Korollar 3.2.9. *Es gilt $\mathbf{B}^{\text{Itô}} \notin \mathscr{C}_g^\alpha$.*

3.3 Die Stratonovich-Brown'sche Bewegung als rauher Pfad

Definition 3.3.1. *Wir definieren* $\mathbb{B} = \mathbb{B}^{\text{Strat}}$ *durch*

$$\mathbb{B}_{s,t} := \int_s^t B_{s,r} \otimes \circ dB_r \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^{d\times d}, \quad s,t \in [0,T].$$

Weiterhin definieren wir $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\text{Strat}}$ *durch* $\mathbf{B} := (B, \mathbb{B})$.

Lemma 3.3.2.

(a) Es gilt

$$\mathbb{B}_{s,t}^{\text{Strat}} = \mathbb{B}_{s,t}^{\text{Itô}} + \frac{t-s}{2}\mathrm{Id} \quad \textit{für alle } s,t \in [0,T].$$

(b) Es gilt

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{B}_{s,t}^{\text{Strat}}) = \frac{1}{2} B_{s,t} \otimes B_{s,t} \quad \textit{für alle } s,t \in [0,T].$$

(c) Es gilt

$$\mathrm{Anti}(\mathbb{B}_{s,t}^{\text{Strat}}) = \mathrm{Anti}(\mathbb{B}_{s,t}^{\text{Itô}}) \quad \textit{für alle } s,t \in [0,T].$$

Beweis. Übung. □

Lemma 3.3.3. *Es sei* $i \in \{1, \dots, d\}$ *beliebig.*

(a) Es gilt

$$\mathbb{B}_{s,t}^{i,i} = \frac{(B_{s,t}^i)^2 - (t-s)}{2} \quad \textit{für alle } s,t \in [0,T].$$

(b) Es gilt

$$\mathbb{B}_{s,t}^{\text{Strat};i,i} = \frac{(B_{s,t}^i)^2}{2} \quad \textit{für alle } s,t \in [0,T].$$

Beweis. Übung. □

Satz 3.3.4. *Für jedes* $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ *gilt* $\mathbb{P}$*-fast sicher* $\mathbf{B}^{\text{Strat}} \in \mathscr{C}_g^\alpha$.

Beweis. Nach Satz 3.2.6 gilt $\mathbb{P}$-fast sicher $\mathbf{B}^{\text{Itô}} \in \mathscr{C}^\alpha$. Nach Lemma 3.3.2(a) gilt

$$\mathbb{B}^{\text{Strat}}_{s,t} = \mathbb{B}^{\text{Itô}}_{s,t} + F_t - F_s \quad \text{für alle } s,t \in [0,T].$$

wobei $F \in C^{2\alpha}([0,T], \mathbb{R}^{d\times d})$ gegeben ist durch

$$F_t = \frac{t}{2}\mathrm{Id}, \quad t \in [0,T].$$

Mit Lemma 2.1.8 folgt $\mathbb{P}$-fast sicher $\mathbf{B}^{\text{Strat}} \in \mathscr{C}^\alpha$, und mit Lemma 3.3.2(b) folgt sogar $\mathbb{P}$-fast sicher $\mathbf{B}^{\text{Strat}} \in \mathscr{C}^\alpha_g$. □

Definition 3.3.5. *Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.*

(a) Wir setzen

$$\delta_n := \frac{T}{2^n}.$$

(b) Für $t \in [0,T]$ definieren wir $[t]_n^-$ durch

$$\begin{aligned} [t]_n^- &:= k\delta_n, \quad k\delta_n \le t < (k+1)\delta_n, \quad k = 0,\dots,2^n-1,\\ [T]_n^- &= T. \end{aligned}$$

(c) Für $t \in [0,T]$ definieren wir $[t]_n^+$ durch

$$\begin{aligned} [t]_n^+ &:= (k+1)\delta_n, \quad k\delta_n \le t < (k+1)\delta_n, \quad k = 0,\dots,2^n-1,\\ [T]_n^+ &:= T. \end{aligned}$$

Definition 3.3.6. *Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die <u>Wong-Zakai-Approximation</u> $B^{(n)}$ für $i = 1\dots,d$ durch*

$$B_t^{(n),i} := B^i_{[t]_n^-} + \frac{t - [t]_n^-}{\delta_n}\left(B^i_{[t]_n^+} - B^i_{[t]_n^-}\right), \quad t \in [0,T].$$

Bemerkung 3.3.7. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$[t]_n^- \le t < [t]_n^+, \quad t \in [0,T),$$

die Wong-Zakai-Approximation ist stückweise stetig differenzierbar, und für $i = 1\dots,d$ gilt

$$\dot{B}_t^{(n),i} = \frac{B^i_{[t]_n^+} - B^i_{[t]_n^-}}{\delta_n}, \quad t \in [0,T] \setminus \{k\delta_n : k = 0,\dots,2^n\}.$$

Definition 3.3.8. *Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $\mathbf{B}^{(n)} = (B^{(n)}, \mathbb{B}^{(n)})$, wobei*

$$\mathbb{B}^{(n)}_{s,t} := \int_s^t B^{(n)}_{s,r} \otimes dB^{(n)}_r, \quad s, t \in [0, T].$$

Bemerkung 3.3.9. *Nach einer Verallgemeinerung von Satz 2.1.10 und Lemma 2.2.6 gilt $\mathbf{B}^{(n)} \in \mathscr{C}^\alpha_g$ für jedes $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.*

Lemma 3.3.10. *Es sei (X, Y) ein zwei-dimensionaler zentrierter Gauß'scher Zufallsvektor mit $\mathrm{Var}[X] > 0$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[Y|X] = cX,$$

wobei

$$c = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{Var}[X]}.$$

Beweis. Wir setzen $Z = Y - cX$. Dann ist (X, Z) ein Gauß'scher Zufallsvektor mit

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X, Z) &= \mathrm{Cov}(X, Y - cX) = \mathrm{Cov}(X, Y) - c \cdot \mathrm{Cov}(X, X) \\ &= \mathrm{Cov}(X, Y) - c \cdot \mathrm{Var}[X] = 0.\end{aligned}$$

Also sind X und Z unabhängig, und wir erhalten

$$\mathbb{E}[Y \mid X] - cX = \mathbb{E}[Y - cX \mid X] = \mathbb{E}[Z \mid X] = \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[Y] - c \cdot \mathbb{E}[X] = 0.$$

Folglich ist $\mathbb{E}[Y \mid X] = cX$. □

Lemma 3.3.11. *Für eine Brown'sche Bewegung B und $s \leq u \leq t$ gilt*

$$\mathrm{Cov}(B_u - B_s, B_t - B_s) = u - s.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(B_u - B_s, B_t - B_s) &= \mathrm{Cov}(B_u - B_s, B_t - B_u) + \mathrm{Cov}(B_u - B_s, B_u - B_s) \\ &= \mathrm{Var}[B_u - B_s] = u - s.\end{aligned}$$

□

Definition 3.3.12. *Wir setzen $\mathscr{G}_n := \sigma(B_{k\delta_n} : k = 0, \dots, 2^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Lemma 3.3.13. *Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.*

(a) Es gilt $B^{(n)}_t = \mathbb{E}[B_t \mid \mathscr{G}_n]$ für alle $t \in [0, T]$.

(b) Es gilt $\mathbb{B}^{(n)}_{s,t} = \mathbb{E}[\mathbb{B}^{\mathrm{Strat}}_{s,t} \,|\, \mathscr{G}_n]$ *für alle* $s,t \in [0,T]$.

Beweis. von (a): Es seien $t \in [0,T]$ und $i \in \{1,\dots,d\}$ beliebig. Dann gilt mit Lemmas 3.3.10 und 3.3.11

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B^i_t \,|\, \mathscr{G}_n] &= \mathbb{E}\big[B^i_{[t]^-_n} + \big(B^i_t - B^i_{[t]^-_n}\big) \,|\, \mathscr{G}_n\big] \\
&= B^i_{[t]^-_n} + \mathbb{E}\big[B^i_t - B^i_{[t]^-_n} \,|\, B^i_{[t]^+_n} - B^i_{[t]^-_n}\big] \\
&= B^i_{[t]^-_n} + \frac{t-[t]^-_n}{\delta_n}(B^i_{[t]^+_n} - B^i_{[t]^-_n}) = B^{(n),i}_t.
\end{aligned}$$

□

Satz 3.3.14. *Es seien* $(\mathscr{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Sub-σ-Algebren mit* $\mathscr{G}_n \subset \mathscr{G}_m$ *für alle* $n,m \in \mathbb{N}$ *mit* $n \le m$. *Wir setzen* $\mathscr{G} := \sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{G}_n)$. *Dann gilt für jede integrierbare Zufallsvariable* $X \in \mathscr{L}^1(\mathscr{G})$, *dass*

$$\mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{G}_n] \overset{f.s.}{\to} X \quad \textit{und} \quad \mathbb{E}[X \,|\, \mathscr{G}_n] \overset{L^1}{\to} X \quad \textit{für } n \to \infty.$$

Beweis. Folgt aus dem Konvergenzsatz für gleichmäßig integrierbare Martingale ... □

Lemma 3.3.15. *Für jedes* $\beta \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ *und alle* $i,j \in \{1,\dots,d\}$ *gilt* $\mathbb{P}$*-fast sicher*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|B^{(n),i}\|_\beta < \infty \quad \textit{und} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mathbb{B}^{(n);i,j}\|_{2\beta} < \infty$$

und

$$B^{(n)}_t \to B_t \quad \textit{und} \quad \mathbb{B}^{(n)}_{0,t} \to \mathbb{B}_{0,t} \quad \textit{für alle } t \in [0,T].$$

Beweis. Die behauptete Konvergenz folgt aus Lemma 3.3.13 und Satz 3.3.14. Es sei $q > 6$ beliebig. Nach den Überlegungen im Beweis von Satz 3.2.6, und dem Satz von Kolmogorov-Chentsov für rauhe Pfade (Satz 3.1.3) existieren Zufallsvariablen $K_\beta \in \mathscr{L}^q$ und $\mathbb{K}_\beta \in \mathscr{L}^{q/2}$, so dass $\mathbb{P}$-fast sicher für alle $i,j \in \{1,\dots,d\}$ gilt

$$\begin{aligned}
|B^i_{s,t}| &\le K_\beta |t-s|^\beta, \quad s,t \in [0,T], \\
|\mathbb{B}^{\mathrm{Strat};i,j}_{s,t}| &\le \mathbb{K}_\beta |t-s|^{2\beta}, \quad s,t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Für alle $s,t \in [0,T]$ mit $s \neq t$ folgt mit Lemma 3.3.13 $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\begin{aligned}
\frac{|B^{(n),i}_{s,t}|}{|t-s|^\beta} &= \frac{|B^{(n),i}_t - B^{(n),i}_s|}{|t-s|^\beta} = \frac{|\mathbb{E}[B^i_t - B^i_s \,|\, \mathscr{G}_n]|}{|t-s|^\beta} = \frac{|\mathbb{E}[B^i_{s,t} \,|\, \mathscr{G}_n]|}{|t-s|^\beta} \\
&\le \frac{\mathbb{E}[|B^i_{s,t}| \,|\, \mathscr{G}_n]}{|t-s|^\beta} \le \mathbb{E}[K_\beta \,|\, \mathscr{G}_n]
\end{aligned}$$

und

$$\frac{|\mathbb{B}^{(n);i,j}_{s,t}|}{|t-s|^{2\beta}} = \frac{|\mathbb{E}[\mathbb{B}^{\mathrm{Strat};i,j}_{s,t} \,|\, \mathscr{G}_n]|}{|t-s|^{2\beta}} \leq \frac{\mathbb{E}[|\mathbb{B}^{\mathrm{Strat};i,j}_{s,t}| \,|\, \mathscr{G}_n]}{|t-s|^{2\beta}} \leq \mathbb{E}[\mathbb{K}_\beta \,|\, \mathscr{G}_n].$$

Es folgt $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|B^{(n),i}\|_\beta = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ s\neq t}} \frac{|B^{(n),i}_{s,t}|}{|t-s|^{\beta}} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[K_\beta \,|\, \mathscr{G}_n] < \infty,$$
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mathbb{B}^{(n);i,j}\|_\beta = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ s\neq t}} \frac{|\mathbb{B}^{(n);i,j}_{s,t}|}{|t-s|^{2\beta}} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[\mathbb{K}_\beta \,|\, \mathscr{G}_n] < \infty,$$

denn nach der Doob'schen L^p-Ungleichung gilt

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[K_\beta \,|\, \mathscr{G}_n]\Big)^q\Big]^{1/q} \leq \frac{q}{q-1}\mathbb{E}\big[|K_\beta|^q\big]^{1/q} < \infty,$$
$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[\mathbb{K}_\beta \,|\, \mathscr{G}_n]\Big)^{q/2}\Big]^{2/q} \leq \frac{\frac{q}{2}}{\frac{q}{2}-1}\mathbb{E}\big[|\mathbb{K}_\beta|^{q/2}\big]^{2/q} < \infty.$$

□

Satz 3.3.16. *Für jedes $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ gilt $\mathbb{P}$-fast sicher $\mathbf{B}^{(n)} \to \mathbf{B}^{\mathrm{Strat}}$ in $\mathscr{C}^\alpha_g$.*

Beweis. Es sei $\beta \in (\alpha, \frac{1}{2})$ beliebig. Nach Lemma 3.3.15 gilt $\mathbb{P}$-fast sicher für alle $i,j \in \{1,\dots,d\}$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|B^{(n),i}\|_\beta < \infty \quad \text{und} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mathbb{B}^{(n);i,j}\|_{2\beta} < \infty$$

und

$$B^{(n)}_t \to B_t \quad \text{und} \quad \mathbb{B}^{(n)}_{0,t} \to \mathbb{B}_{0,t} \quad \text{für alle } t \in [0,T].$$

Also folgt mit Satz 2.1.18, dass $\mathbb{P}$-fast sicher $\mathbf{B}^{(n)} \to \mathbf{B}^{\mathrm{Strat}}$ in $\mathscr{C}^\alpha_g$. □

Kapitel 4

Integration bezüglich rauher Pfade

Ziel dieses Kapitels: Definition des Integrals

$$\int_0^1 Y_t \, d\mathbf{X}_t$$

für $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^\alpha = \mathscr{C}^\alpha([0,1], V)$ und eine stetige Funktion $Y : [0,1] \to L(V,W)$, so dass der bilineare Operator

$$(\mathbf{X}, Y) \mapsto \int_0^1 Y_t \, d\mathbf{X}_t$$

stetig bezüglich der relevanten Topologien ist.

4.1 Das Young-Integral

Satz 4.1.1. *Es seien $X \in \mathcal{C}^\alpha([0,1], V)$ und $Y \in \mathcal{C}^\beta([0,1], L(V,W))$ mit $\alpha + \beta > 1$. Dann existiert das Young-Integral*

$$\int_0^1 Y_t \, dX_t = \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{[s,t] \in \Pi} Y_s X_{s,t},$$

und es gilt

$$\left| \int_0^1 (Y_r - Y_0) \, dX_r \right| \leq C \|Y\|_{\beta;[0,1]} \|X\|_{\alpha;[0,1]}$$

mit einer Konstanten $C = C(\alpha + \beta) > 0$.

Bemerkung 4.1.2. *Also ist der bilineare Operator*

$$\mathcal{C}^\alpha \times \mathcal{C}^\beta \to \mathbb{R}, \quad (X,Y) \mapsto \int_0^1 (Y_t - Y_0)\, dX_t$$

stetig.

Bemerkung 4.1.3. *Funktioniert nur für $\alpha + \beta > 1$. Es gibt ein Gegenbeispiel mit Folgen $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y^n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $X^n \to 0$ und $Y^n \to 0$ in $\mathcal{C}^{1/2}$, aber $\int_0^1 Y_t^n dX_t^n \to \infty$.*

Bemerkung 4.1.4. *Falls $\alpha = \beta$ (woran wir besonders interessiert sind), bedeutet dies $\alpha > \frac{1}{2}$.*

Bemerkung 4.1.5. *In der Situation von Satz 4.1.1 gilt sogar*

$$\left| \int_s^t Y_r dX_r - Y_s X_{s,t} \right| = \left| \int_s^t (Y_r - Y_s) dX_r \right| \leq C \|Y\|_\beta \|X\|_\alpha |t-s|^{\alpha+\beta},$$

wobei $\|Y\|_\beta = \|Y\|_{\beta;[s,t]}$ und $\|X\|_\alpha = \|X\|_{\alpha;[s,t]}$.

Beweis. Übung. □

4.2 Integration von 1-Formen

Lemma 4.2.1. *Es seien $F \in C_b^2(V, L(V,W))$ und $X \in \mathcal{C}^\alpha$. Wir definieren*

$$\begin{aligned} Y &: [0,T] \to L(V,W), \quad Y := F(X), \\ Y' &: [0,T] \to L(V, L(V,W)), \quad Y' := DF(X), \\ R^Y &: [0,T]^2 \to L(V,W), \quad R^Y_{s,t} := Y_{s,t} - Y'_s X_{s,t} \quad \text{für alle } s,t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \|Y\|_\alpha &\leq \|DF\|_\infty \|X\|_\alpha, \\ \|Y'\|_\alpha &\leq \|D^2F\|_\infty \|X\|_\alpha, \\ \|R^Y\|_{2\alpha} &\leq \frac{1}{2} \|D^2F\|_\infty \|X\|_\alpha^2. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$Y, Y' \in \mathcal{C}^\alpha \quad \text{und} \quad R^Y \in \mathcal{C}^{2\alpha}.$$

Beweis. Für alle $s, t \in [0, T]$ gilt nach Bemerkung 1.1.49(a)

$$\begin{aligned} |Y_{s,t}| &= |Y_t - Y_s| = |F(X_t) - F(X_s)| \\ &\leq \|DF\|_\infty |X_t - X_s| = \|DF\|_\infty |X_{s,t}|, \end{aligned}$$

und damit

$$\|Y\|_\alpha = \sup_{\substack{s,t\in[0,T] \\ s\neq t}} \frac{|Y_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} \leq \|DF\|_\infty \sup_{\substack{s,t\in[0,T] \\ s\neq t}} \frac{|X_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} = \|DF\|_\infty \|X\|_\alpha.$$

Für alle $s, t \in [0, T]$ gilt nach Bemerkung 1.1.49(a)

$$\begin{aligned} |Y'_{s,t}| &= |Y'_t - Y'_s| = |DF(X_t) - DF(X_s)| \\ &\leq \|D^2F\|_\infty |X_t - X_s| = \|D^2F\|_\infty |X_{s,t}|, \end{aligned}$$

und damit

$$\|Y'\|_\alpha = \sup_{\substack{s,t\in[0,T] \\ s\neq t}} \frac{|Y'_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} \leq \|D^2F\|_\infty \sup_{\substack{s,t\in[0,T] \\ s\neq t}} \frac{|X_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} = \|D^2F\|_\infty \|X\|_\alpha.$$

Für alle $s, t \in [0, T]$ gilt nach Bemerkung 1.1.49(b)

$$\begin{aligned} |R^Y_{s,t}| &= |Y_{s,t} - Y'_s X_{s,t}| = |Y_t - Y_s - Y'_s(X_t - X_s)| \\ &= |F(X_t) - F(X_s) - DF(X_s)(X_t - X_s)| \leq \frac{1}{2}\|D^2F\|_\infty |X_{s,t}|^2. \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \|R^Y\|_{2\alpha} &= \sup_{\substack{s,t\in[0,T] \\ s\neq t}} \frac{|R^Y_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}} \leq \frac{1}{2}\|D^2F\|_\infty \sup_{\substack{s,t\in[0,T] \\ s\neq t}} \frac{|X_{s,t}|^2}{|t-s|^{2\alpha}} \\ &= \frac{1}{2}\|D^2F\|_\infty \left(\sup_{\substack{s,t\in[0,T] \\ s\neq t}} \frac{|X_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} \right)^2 = \frac{1}{2}\|D^2F\|_\infty \|X\|_\alpha^2. \end{aligned}$$

□

Definition 4.2.2. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\Delta_T^n \subset \mathbb{R}^n$ den Simplex*

$$\Delta_T^n := \{t \in \mathbb{R}^n : 0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq T\}.$$

Definition 4.2.3. *Es seien $\alpha, \beta > 0$ reelle Zahlen. Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}_2^{\alpha,\beta}([0,T], W)$ den Raum aller Funktionen $\Xi : \Delta_T^2 \to W$, so dass $\Xi_{t,t} = 0$ für alle $t \in [0, T]$ und*

$$\|\Xi\|_{\alpha,\beta} := \|\Xi\|_\alpha + \|\delta\Xi\|_\beta < \infty.$$

Hierbei ist $\|\Xi\|_\alpha$ *die Höldernorm*

$$\|\Xi\|_\alpha = \sup_{\substack{(s,t)\in\Delta_T^2\\ s<t}} \frac{|\Xi_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}.$$

Weiterhin ist die Funktion $\delta\Xi : \Delta_T^3 \to \mathbb{R}$ *definiert durch*

$$\delta\Xi_{s,u,t} := \Xi_{s,t} - \Xi_{s,u} - \Xi_{u,t}, \quad (s,u,t) \in \Delta_T^3,$$

und die Höldernorm ist gegeben durch

$$\|\delta\Xi\|_\beta := \sup_{\substack{(s,u,t)\in\Delta_T^3\\ s<u<t}} \frac{|\delta\Xi_{s,u,t}|}{|t-s|^\beta}.$$

Lemma 4.2.4 (Sewing Lemma)**.** *Es seien* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, so dass* $0 < \alpha \leq 1 < \beta$*. Dann existiert eine eindeutig bestimmte stetige Funktion* $\mathcal{I} : \mathcal{C}_2^{\alpha,\beta}([0,T],W) \to \mathcal{C}^\alpha([0,T],W)$*, die charakterisiert ist durch:*

(a) Es gilt $(\mathcal{I}\Xi)_0 = 0$ *für alle* $\Xi \in \mathcal{C}_2^{\alpha,\beta}([0,T],W)$*.*

(b) Für jedes $\Xi \in \mathcal{C}_2^{\alpha,\beta}([0,T],W)$ *existiert eine Konstante* $K = K(\beta) > 0$*, so dass*

$$|(\mathcal{I}\Xi)_{s,t} - \Xi_{s,t}| \leq K\|\delta\Xi\|_\beta |t-s|^\beta \quad \textit{für alle } (s,t) \in \Delta_T^2.$$

Insbesondere existiert eine Konstante $C = C(\beta, \|\delta\Xi\|_\beta) > 0$*, so dass*

$$|(\mathcal{I}\Xi)_{s,t} - \Xi_{s,t}| \leq C|t-s|^\beta \quad \textit{für alle } (s,t) \in \Delta_T^2.$$

Weiterhin gilt $\mathcal{I} \in L(\mathcal{C}_2^{\alpha,\beta}([0,T],W), \mathcal{C}^\alpha([0,T],W))$*, und* $\mathcal{I}$ *ist gegeben durch*

$$(\mathcal{I}\Xi)_{s,t} = \lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\Pi} \Xi_{u,v} \quad \textit{für alle } \Xi \in \mathcal{C}_2^{\alpha,\beta}([0,T],W),$$

wobei Π *jeweils eine Partition von* $[s,t]$ *bezeichnet.*

Beweis.

(i) Zunächst nehmen wir an, dass $\mathcal{I} : \mathcal{C}_2^{\alpha,\beta} \to \mathcal{C}^\alpha$ gegeben durch

$$(\mathcal{I}\Xi)_{s,t} = \lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\Pi} \Xi_{u,v} \quad \text{für alle } \Xi \in \mathcal{C}_2^{\alpha,\beta}$$

die Eigenschaften (a) und (b) erfüllt. Per Konstruktion ist $\mathcal{I}$ ein linearer Operator. Es sei $\Xi \in \mathcal{C}_2^{\alpha,\beta}$ beliebig. Für alle $(s,t) \in \Delta_T^2$ gilt

$$|(\mathcal{I}\Xi)_{s,t}| \leq |(\mathcal{I}\Xi)_{s,t} - \Xi_{s,t}| + |\Xi_{s,t}| \leq K\|\delta\Xi\|_\beta |t-s|^\beta + |\Xi_{s,t}|$$

Mit $M := \max\{1, KT^{\beta-\alpha}\}$ folgt

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{I}\Xi\|_\alpha &= \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ s\neq t}} \frac{|(\mathcal{I}\Xi)_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} = \sup_{\substack{(s,t)\in\Delta_T^2\\ s<t}} \frac{|(\mathcal{I}\Xi)_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} \\
&\leq \sup_{\substack{(s,t)\in\Delta_T^2\\ s<t}} K\|\delta\Xi\|_\beta |t-s|^{\beta-\alpha} + \sup_{\substack{(s,t)\in\Delta_T^2\\ s<t}} \frac{|\Xi_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} \\
&\leq K\|\delta\Xi\|_\beta T^{\beta-\alpha} + \|\Xi\|_\alpha \leq M\big(\|\delta\Xi\|_\beta + \|\Xi\|_\alpha\big) = M\|\Xi\|_{\alpha,\beta}.
\end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{I}$ ein stetiger linearer Operator.

(ii) Eindeutigkeit: Es sei $\Xi \in \mathcal{C}_2^{\alpha,\beta}$ beliebig. Weiterhin seien $F, \bar{F} \in \mathcal{C}^\alpha$, so dass $F_0 = \bar{F}_0 = 0$ und

$$\begin{aligned}
|F_{s,t} - \Xi_{s,t}| &\leq C|t-s|^\beta \quad \text{für alle } (s,t) \in \Delta_T^2, \\
|\bar{F}_{s,t} - \Xi_{s,t}| &\leq C|t-s|^\beta \quad \text{für alle } (s,t) \in \Delta_T^2.
\end{aligned}$$

Wir setzen $G := F - \bar{F}$. Dann gilt $G_0 = 0$ und für alle $(s,t) \in \Delta_T^2$

$$|G_{s,t}| = |F_{s,t} - \bar{F}_{s,t}| \leq |F_{s,t} - \Xi_{s,t}| + |\Xi_{s,t} - \bar{F}_{s,t}| \leq 2C|t-s|^\beta,$$

und damit $G \in \mathcal{C}^\beta$. Wegen $\beta > 1$ folgt $G = 0$ (Übung), und damit $F = \bar{F}$.

(iii) Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{I} : \mathcal{C}_2^{\alpha,\beta} \to \mathcal{C}^\alpha$ gegeben durch

$$(\mathcal{I}\Xi)_{s,t} = \lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\Pi} \Xi_{u,v} \quad \text{für alle } \Xi \in \mathcal{C}_2^{\alpha,\beta}$$

die Eigenschaften (a) und (b) erfüllt.

□

Bemerkung 4.2.5. *Es seien $X : [0,T] \to V$ und $F \in C^1(V, L(V,W))$. Mit Bemerkung 1.2.10 gilt*

$$\begin{aligned}
F(X) &: [0,T] \to L(V,W), \\
DF(X) &: [0,T] \to L(V, L(V,W)) \hookrightarrow L(V \otimes V, W).
\end{aligned}$$

Satz 4.2.6 (Lyons)**.** *Es sei* $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ *für ein* $\alpha > \frac{1}{3}$, *und es sei* $F \in C_b^2(V, L(V, W))$.

(a) Das W*-wertige rauhe Integral*

$$\int_0^1 F(X_s)d\mathbf{X}_s := \lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{[s,t]\in\Pi} \big(F(X_s)X_{s,t} + DF(X_s)\mathbb{X}_{s,t}\big)$$

existiert.

(b) Für alle $s, t \in [0, T]$ *gilt*

$$\begin{aligned}&\left|\int_s^t F(X_r)d\mathbf{X}_r - F(X_s)X_{s,t} - DF(X_s)\mathbb{X}_{s,t}\right| \\ &\leq C\|F\|_{C_b^2}\Big(\|X\|_\alpha^3 + \|X\|_\alpha\|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\Big)|t-s|^{3\alpha}\end{aligned}$$

mit einer Konstanten $C = C(\alpha) > 0$.

(c) Es gilt $\int_0^\cdot F(X_s)\, d\mathbf{X}_s \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], W)$.

Beweis.

(a) Wir definieren

$$\begin{aligned}Y &: [0,T] \to L(V,W), \quad Y := F(X), \\ Y' &: [0,T] \to L(V, L(V,W)) \hookrightarrow L(V\otimes V, W), \quad Y' := DF(X), \\ R^Y &: [0,T]^2 \to L(V,W), \quad R^Y_{s,t} := Y_{s,t} - Y'_s X_{s,t} \quad \text{für alle } s,t\in[0,T].\end{aligned}$$

Weiterhin definieren wir $\Xi : \Delta_T^2 \to W$ durch

$$\Xi_{s,t} := Y_s X_{s,t} + Y'_s\mathbb{X}_{s,t}, \quad (s,t)\in\Delta_T^2.$$

Wir werden zeigen, dass $\Xi \in \mathcal{C}_2^{\alpha,\beta}$, wobei $\beta := 3\alpha > 1$. Es gilt

$$\Xi_{t,t} := Y_s X_{t,t} + Y'_s\mathbb{X}_{t,t} = 0 \quad \text{für alle } t \in [0,T],$$

da $X_{t,t} = 0$ und $\mathbb{X}_{t,t} = 0$. Für alle $(s,t) \in \Delta_T^2$ gilt

$$\begin{aligned}|\Xi_{s,t}| &= |Y_s X_{s,t} + Y'_s\mathbb{X}_{s,t}| \leq |F(X_s)X_{s,t}| + |DF(X_s)\mathbb{X}_{s,t}| \\ &\leq \|F\|_\infty |X_{s,t}| + \|DF\|_\infty |\mathbb{X}_{s,t}|,\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\|\Xi\|_\alpha &= \sup_{\substack{(s,t)\in\Delta_T^2\\ s<t}} \frac{|\Xi_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} \leq \|F\|_\infty \sup_{\substack{(s,t)\in\Delta_T^2\\ s<t}} \frac{|X_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} + \|DF\|_\infty \sup_{\substack{(s,t)\in\Delta_T^2\\ s<t}} \frac{|\mathbb{X}_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} \\ &\leq \|F\|_\infty\|X\|_\alpha + \|DF\|_\infty\|\mathbb{X}\|_\alpha < \infty.\end{aligned}$$

Für alle $(s,u,t) \in \Delta_T^3$ gilt

$$\delta\Xi_{s,u,t} = -R^Y_{s,u}X_{u,t} - Y'_{s,u}\mathbb{X}_{u,t}.$$

(Übung.) Für alle $(s,u,t) \in \Delta_T^3$ folgt nach den Rechnungen im Beweis von Lemma 4.2.1

$$\begin{aligned}|\delta\Xi_{s,u,t}| &\leq |R^Y_{s,u}|\,|X_{u,t}| + |Y'_{s,u}|\,|\mathbb{X}_{u,t}| \\ &\leq \frac{1}{2}\|D^2F\|_\infty |X_{s,u}|^2|X_{u,t}| + \|D^2F\|_\infty |X_{s,u}|\,|\mathbb{X}_{u,t}|.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\|\delta\Xi\|_\beta &= \sup_{\substack{(s,u,t)\in\Delta_T^3 \\ s<u<t}} \frac{|\delta\Xi_{s,u,t}|}{|t-s|^\beta} \\ &\leq \frac{1}{2}\|D^2F\|_\infty \sup_{\substack{(s,u,t)\in\Delta_T^3 \\ s<u<t}} \frac{|X_{s,u}|^2|X_{u,t}|}{|t-s|^{3\alpha}} + \|D^2F\|_\infty \sup_{\substack{(s,u,t)\in\Delta_T^3 \\ s<u<t}} \frac{|X_{s,u}|\,|\mathbb{X}_{u,t}|}{|t-s|^{3\alpha}} \\ &\leq \frac{1}{2}\|D^2F\|_\infty \sup_{\substack{(s,u,t)\in\Delta_T^3 \\ s<u<t}} \frac{|X_{s,u}|^2}{|u-s|^{2\alpha}}\frac{|X_{u,t}|}{|t-u|^\alpha} + \|D^2F\|_\infty \sup_{\substack{(s,u,t)\in\Delta_T^3 \\ s<u<t}} \frac{|X_{s,u}|}{|u-s|^\alpha}\frac{|\mathbb{X}_{u,t}|}{|t-u|^{2\alpha}} \\ &\leq \frac{1}{2}\|D^2F\|_\infty\|X\|_\alpha^3 + \|D^2F\|_\infty\|X\|_\alpha\|\mathbb{X}\|_{2\alpha} < \infty.\end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\|\Xi\|_{\alpha,\beta} = \|\Xi\|_\alpha + \|\delta\Xi\|_\beta < \infty,$$

und damit $\Xi \in \mathcal{C}_2^{\alpha,\beta}$. Nach dem Sewing Lemma (Lemma 4.2.4) existiert das W-wertige rauhe Integral

$$\int_0^1 F(X_s)d\mathbf{X}_s := \lim_{|\Pi|\to 0}\sum_{[s,t]\in\Pi} \Xi_{s,t} = \lim_{|\Pi|\to 0}\sum_{[s,t]\in\Pi}\big(F(X_s)X_{s,t} + DF(X_s)\mathbb{X}_{s,t}\big).$$

(b) Nach dem Sewing Lemma (Lemma 4.2.4) und den vorherigen Rechnungen gilt

$$\begin{aligned}&\left|\int_s^t F(X_r)d\mathbf{X}_r - F(X_s)X_{s,t} - DF(X_s)\mathbb{X}_{s,t}\right| \\ &= |(\mathcal{I}\Xi)_{s,t} - \Xi_{s,t}| \leq C\|\delta\Xi\|_\beta|t-s|^\beta \\ &\leq C\|F\|_{C_b^2}\Big(\|X\|_\alpha^3 + \|X\|_\alpha\|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\Big)|t-s|^{3\alpha},\end{aligned}$$

wobei $C>0$ nur von β – und damit von α – abhängt.

(c) Es gilt mit $Z_{s,t} = \int_s^t F(X_r)d\mathbf{X}_r$

$$Z_{s,t} = \left(\int_s^t F(X_r)d\mathbf{X}_r - F(X_s)X_{s,t} - DF(X_s)\mathbb{X}_{s,t} \right) + \Xi_{s,t}.$$

Der erste Term gehört zu $\mathcal{C}^{3\alpha}$, und – wie oben gezeigt – gilt $\Xi \in \mathcal{C}^\alpha$. Also gilt $Z \in \mathcal{C}^\alpha$.

□

Bemerkung 4.2.7. *Wie wir später zeigen werden, ist die Abbildung*

$$\mathscr{C}^\alpha \to \mathcal{C}^\alpha, \quad \mathbf{X} \mapsto \int_0^\cdot F(X_s)\, d\mathbf{X}_s$$

bezüglich ϱ_α stetig.

4.3 Integration von regulären rauhen Pfaden

Im Folgenden ist $\bar{W}$ ein weiterer Banachraum; meistens $\bar{W} = L(V, W)$.

Definition 4.3.1. *Es sei $X \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], V)$ gegeben.*

(a) Wir sagen, dass ein Pfad $Y \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], \bar{W})$ bezüglich X <u>regulär</u> ist, falls ein $Y' \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], L(V, \bar{W}))$ existiert, so dass $\|R^Y\|_{2\alpha} < \infty$, wobei R^Y gegeben ist durch

$$R^Y_{s,t} := Y_{s,t} - Y'_s X_{s,t} \quad \text{für alle } s, t \in [0,T].$$

(b) Dies definiert den Raum der (bezüglich X) regulären rauhen Pfade, und wir schreiben

$$(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], \bar{W}).$$

(c) In diesem Fall nennen wir Y' eine <u>Gubinelli-Ableitung</u> von Y (bezüglich X).

Definition 4.3.2. *Auf dem Raum $\mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], \bar{W})$ definieren wir die Halbnorm*

$$\|(Y, Y')\|_{X,2\alpha} := \|Y'\|_\alpha + \|R^Y\|_{2\alpha}.$$

Bemerkung 4.3.3. *Der Raum $\mathscr{D}_X^{2\alpha}$ versehen mit der Norm*

$$|||(Y, Y')|||_{X,2\alpha} := |Y_0| + |Y'_0| + \|(Y, Y')\|_{X,2\alpha}$$

ist ein Banachraum.

Lemma 4.3.4. *Es sei $X \in \mathcal{C}^\alpha$ fest. Für alle $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$ gilt*

$$\|Y\|_\alpha \le C(1 + \|X\|_\alpha)(|Y_0'| + \|(Y, Y')\|_{X,2\alpha}),$$

wobei die Konstante $C = C(\alpha, T) > 0$ gleichmäßig von $T \le 1$ abhängt. Insbesondere gilt also

$$\|Y\|_\alpha \le C(1 + \|X\|_\alpha) \left|\!\left|\!\left| (Y, Y') \right|\!\right|\!\right|_{X,2\alpha} .$$

Beweis. Übung. □

Bemerkung 4.3.5. *Es sei Y' eine Gubinelli-Ableitung von Y (bezüglich X). Dann gilt*

$$Y_{s,t} = Y_s' X_{s,t} + R_{s,t}^Y.$$

Im Fall $X_{s,t} = t - s$ entspricht dies der Fréchet-Differenzierbarkeit; siehe Satz 1.1.40.

Bemerkung 4.3.6. *Es sei $X \in \mathcal{C}^\alpha$. Weiterhin sei $Y \in \mathcal{C}^{2\alpha} \subset \mathcal{C}^\alpha$.*

(a) $Y' = 0$ ist eine Gubinelli-Ableitung von Y, da $\|R^Y\|_{2\alpha} = \|Y\|_{2\alpha} < \infty$.

(b) Falls $X \in \mathcal{C}^{2\alpha} \subset \mathcal{C}^\alpha$, dann ist jeder Pfad $Y' \in \mathcal{C}^\alpha$ eine Gubinelli-Ableitung von Y, da

$$\|R^Y\|_{2\alpha} \le \|Y\|_{2\alpha} + \|Y'\|_\infty \|X\|_{2\alpha} < \infty.$$

Lemma 4.3.7. *Es seien $F \in C_b^2(V, L(V, W))$ und $X \in \mathcal{C}^\alpha$. Wir definieren*

$$\begin{aligned} Y &: [0,T] \to L(V,W), \quad Y := F(X), \\ Y' &: [0,T] \to L(V, L(V,W)), \quad Y' := DF(X). \end{aligned}$$

Dann gilt $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], L(V,W))$.

Beweis. Folgt aus Lemma 4.2.1. □

Bemerkung 4.3.8. *Im Folgenden benutzen wir die Kurznotationen*

$$\mathscr{C}^\alpha := \mathscr{C}^\alpha([0,T], V) \quad \text{und} \quad \mathscr{D}_X^{2\alpha} := \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], L(V,W)).$$

Satz 4.3.9 (Gubinelli)**.** *Es seien $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ und $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$ für ein $\alpha > \frac{1}{3}$.*

(a) Das W-wertige rauhe Integral

$$\int_0^1 Y_s \, d\mathbf{X}_s := \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{[s,t] \in \Pi} (Y_s X_{s,t} + Y_s' \mathbb{X}_{s,t})$$

existiert.

(b) Für alle $s,t \in [0,T]$ gilt

$$\left| \int_s^t Y_r \, d\mathbf{X}_r - Y_s X_{s,t} - Y'_s \mathbb{X}_{s,t} \right| \leq C\big(\|X\|_\alpha \|R^Y\|_{2\alpha} + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\|Y'\|_\alpha\big)|t-s|^{3\alpha}$$

mit einer Konstanten $C = C(\alpha) > 0$.

(c) Die Abbildung

$$(Y, Y') \mapsto (Z, Z') := \left(\int_0^{\cdot} Y_s \, d\mathbf{X}_s, Y \right)$$

ist ein linearer Operator zwischen den Banachräumen $\mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], L(V,W))$ und $\mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], W)$, und es gilt

$$\|(Z,Z')\|_{X,2\alpha} \leq \|Y\|_\alpha + \|Y'\|_{L^\infty}\|\mathbb{X}\|_{2\alpha} + C\big(\|X\|_\alpha \|R^Y\|_{2\alpha} + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\|Y'\|_\alpha\big),$$

wobei $C = C(\alpha, T) > 0$ gleichmäßig bezüglich $T \leq 1$ gewählt werden kann.

Beweis.

(a) Wie im Beweis von Satz 4.2.6 definieren wir $\Xi : \Delta_T^2 \to W$ durch

$$\Xi_{s,t} := Y_s X_{s,t} + Y'_s \mathbb{X}_{s,t}, \quad (s,t) \in \Delta_T^2.$$

Wir werden zeigen, dass $\Xi \in \mathcal{C}_2^{\alpha,\beta}$, wobei $\beta := 3\alpha > 1$. Wie im Beweis von Satz 4.2.6 gilt $\Xi_{t,t} = 0$ für alle $t \in [0,T]$. Da Y und Y' auf dem kompakten Intervall $[0,T]$ stetig sind, gilt $\|Y\|_\infty < \infty$ und $\|Y'\|_\infty < \infty$. Für alle $(s,t) \in \Delta_T^2$ gilt

$$\begin{aligned} |\Xi_{s,t}| &= |Y_s X_{s,t} + Y'_s \mathbb{X}_{s,t}| \leq |Y_s X_{s,t}| + |Y'_s \mathbb{X}_{s,t}| \\ &\leq \|Y\|_\infty |X_{s,t}| + \|Y'\|_\infty |\mathbb{X}_{s,t}|, \end{aligned}$$

und damit

$$\|\Xi\|_\alpha \leq \|Y\|_\infty \|X\|_\alpha + \|Y'\|_\infty \|\mathbb{X}\|_\alpha < \infty.$$

Wie im Beweis von Satz 4.2.6 zeigen wir, dass für alle $(s,u,t) \in \Delta_T^3$ gilt

$$|\delta\Xi_{s,u,t}| \leq |R^Y_{s,u}|\,|X_{u,t}| + |Y'_{s,u}|\,|\mathbb{X}_{u,t}|.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \|\delta\Xi\|_\beta &= \sup_{\substack{(s,u,t)\in\Delta_T^3 \\ s<u<t}} \frac{|\delta\Xi_{s,u,t}|}{|t-s|^\beta} \\ &\leq \sup_{\substack{(s,u,t)\in\Delta_T^3 \\ s<u<t}} \frac{|R^Y_{s,u}|^2 |X_{u,t}|}{|t-s|^{3\alpha}} + \sup_{\substack{(s,u,t)\in\Delta_T^3 \\ s<u<t}} \frac{|Y'_{s,u}|\,|\mathbb{X}_{u,t}|}{|t-s|^{3\alpha}} \\ &\leq \sup_{\substack{(s,u,t)\in\Delta_T^3 \\ s<u<t}} \frac{|X_{u,t}|}{|t-u|^\alpha} \frac{|R^Y_{s,u}|^2}{|u-s|^{2\alpha}} + \sup_{\substack{(s,u,t)\in\Delta_T^3 \\ s<u<t}} \frac{|\mathbb{X}_{u,t}|}{|t-u|^{2\alpha}} \frac{|Y'_{s,u}|}{|u-s|^\alpha} \\ &\leq \|X\|_\alpha \|R^Y\|_{2\alpha} + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\|Y'\|_\alpha < \infty. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\|\Xi\|_{\alpha,\beta} = \|\Xi\|_\alpha + \|\delta\Xi\|_\beta < \infty,$$

und damit $\Xi \in \mathcal{C}_2^{\alpha,\beta}$. Nach dem Sewing Lemma (Lemma 4.2.4) existiert das W-wertige rauhe Integral

$$\int_0^1 Y_s d\mathbf{X}_s := \lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{[s,t]\in\Pi} \Xi_{s,t} = \lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{[s,t]\in\mathcal{P}} (Y_s X_{s,t} + Y_s' \mathbb{X}_{s,t}).$$

(b) Nach dem Sewing Lemma (Lemma 4.2.4) und den vorherigen Rechnungen gilt

$$\begin{aligned}
&\left| \int_s^t Y_r d\mathbf{X}_r - Y_s X_{s,t} - Y_s' \mathbb{X}_{s,t} \right| \\
&= |(\mathcal{I}\Xi)_{s,t} - \Xi_{s,t}| \le C \|\delta\Xi\|_\beta |t-s|^\beta \\
&\le C\Big(\|X\|_\alpha \|R^Y\|_{2\alpha} + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} \|Y'\|_\alpha\Big) |t-s|^{3\alpha},
\end{aligned}$$

wobei $C > 0$ nur von β – und damit von α – abhängt.

(c) Wie wir bisher gezeigt haben, gilt

$$\begin{aligned}
&(s,t) \mapsto Y_s X_{s,t} \in \mathcal{C}^\alpha, \\
&(s,t) \mapsto Y_s' \mathbb{X}_{s,t} \in \mathcal{C}^{2\alpha}, \\
&(s,t) \mapsto \int_s^t Y_s \, d\mathbf{X}_r - Y_s X_{s,t} - Y_s' \mathbb{X}_{s,t} \in \mathcal{C}^{3\alpha}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $Z = \int_0^\cdot Y_s \, d\mathbf{X}_s \in \mathcal{C}^\alpha$. Wegen $Z' = Y$ und $(Y, Y') \in \mathscr{D}^{2\alpha}$ folgt $Z' \in \mathcal{C}^\alpha$. Es gilt

$$R^Z_{s,t} = Z_{s,t} - Z_s' X_{s,t} = Z_{s,t} - Y_s X_{s,t} = Y_s' \mathbb{X}_{s,t} + (Z_{s,t} - Y_s X_{s,t} - Y_s' \mathbb{X}_{s,t}),$$

und daher

$$\|R^Z\|_{2\alpha} \le \|Y'\|_{L^\infty} \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} + CT^\alpha \big(\|X\|_\alpha \|R^Y\|_{2\alpha} + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} \|Y'\|_\alpha\big).$$

Es folgt $(Z, Z') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$ und

$$\begin{aligned}
\|(Z,Z')\|_{X,2\alpha} &= \|Z'\|_\alpha + \|R^Z\|_{2\alpha} = \|Y\|_\alpha + \|R^Z\|_{2\alpha} \\
&\le \|Y\|_\alpha + \|Y'\|_{L^\infty} \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} + CT^\alpha \big(\|X\|_\alpha \|R^Y\|_{2\alpha} + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} \|Y'\|_\alpha\big).
\end{aligned}$$

□

Beispiel 4.3.10. *Es seien* $X \in \mathcal{C}^\alpha$ *und* $\mathbb{X}, \bar{\mathbb{X}} \in \mathcal{C}_2^{2\alpha}$, *so dass* $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}), \bar{\mathbf{X}} = (X, \bar{\mathbb{X}}) \in \mathscr{C}^\alpha$. *Nach Lemma 2.1.9 existiert eine Funktion* $f \in C^{2\alpha}([0,T], V \otimes V)$, *so dass*

$$\bar{\mathbb{X}}_{s,t} = \mathbb{X}_{s,t} + f_{s,t}, \quad s,t \in [0,T].$$

Weiter sei $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$. *Nach Satz 4.3.9(a) gilt*

$$\begin{aligned}\int_s^t Y_r \, d\bar{\mathbf{X}}_r &= \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{[u,v] \in \Pi} (Y_u X_{u,v} + Y_u' \bar{\mathbb{X}}_{u,v}) \\ &= \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{[u,v] \in \Pi} (Y_u X_{u,v} + Y_u' \mathbb{X}_{u,v}) + \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{[u,v] \in \Pi} Y_u' f_{u,v} \\ &= \int_s^t Y_r \, d\mathbf{X}_r + \int_s^t Y_r' \, df_r.\end{aligned}$$

Das letzte Integral ist ein Young-Integral, das wegen $Y' \in \mathcal{C}^\alpha$ *und* $f \in \mathcal{C}^{2\alpha}$ *sowie* $3\alpha > 1$ *nach Satz 4.1.1 wohldefiniert ist.*

Lemma 4.3.11. *Es sei* $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ *ein rauher Pfad. Weiterhin sei* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *beliebig.*

(a) Es gilt $\lambda \mathbf{X} := (\lambda X, \lambda^2 \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$.

(b) Für alle $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$ *gilt* $(\lambda^{-1} Y, \lambda^{-2} Y') \in \mathscr{D}_{\lambda X}^{2\alpha}$ *mit* $R^{\lambda^{-1} Y} = \lambda^{-1} R^Y$ *und*

$$\int_s^t Y_r \, d\mathbf{X}_r = \int_s^t (\lambda^{-1} Y) \, d(\lambda \mathbf{X})_r.$$

Beweis. Übung. □

Bemerkung 4.3.12. *Also ist das Integral* $\int_0^1 Y_s \, d\mathbf{X}_s$ *invariant unter der Transformation*

$$(Y, Y', X, \mathbb{X}) \mapsto (\lambda^{-1} Y, \lambda^{-2} Y', \lambda X, \lambda^2 \mathbb{X}).$$

4.4 Stabilität bezüglich rauher Integration

Definition 4.4.1. *Es seien* $X, \tilde{X} \in \mathcal{C}^\alpha$. *Für* $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$ *und* $(\tilde{Y}, \tilde{Y}') \in \mathscr{D}_{\tilde{X}}^{2\alpha}$ *setzen wir*

$$d_{X, \tilde{X}, 2\alpha}\big((Y, Y'), (\tilde{Y}, \tilde{Y}')\big) := \|Y' - \tilde{Y}'\|_\alpha + \|R^Y - R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha}.$$

Bemerkung 4.4.2. *Es sei $X \in \mathcal{C}^\alpha$. Für $(Y, Y'), (\tilde{Y}, \tilde{Y}') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$ gilt*

$$d_{X,X,2\alpha}\big((Y, Y'), (\tilde{Y}, \tilde{Y}')\big) = \|(Y, Y') - (\tilde{Y}, \tilde{Y}')\|_{X,2\alpha}.$$

Definition 4.4.3. *Für $X \in \mathcal{C}^\alpha$ definieren wir die Abbildung*

$$\iota_X : \mathscr{D}_X^{2\alpha} \to \mathcal{C}^\alpha \oplus \mathcal{C}_2^{2\alpha}, \quad (Y, Y') \mapsto (Y', R^Y).$$

Bemerkung 4.4.4. *Falls $Y_0 = \xi$, dann gilt*

$$Y_t = \xi + Y_0' X_{0,t} + R_{0,t}^Y, \quad t \in [0, T].$$

Definition 4.4.5. *Auf $\mathcal{C}^\alpha \oplus \mathcal{C}_2^{2\alpha}$ definieren wir die Halbnorm*

$$\|(Z, Z')\|_{\alpha,2\alpha} := \|Z\|_\alpha + \|Z'\|_{2\alpha}.$$

Bemerkung 4.4.6. *Es gilt*

$$d_{X,\tilde{X},2\alpha}\big((Y, Y'), (\tilde{Y}, \tilde{Y}')\big) = \|\iota_X(Y, Y') - \iota_{\tilde{X}}(\tilde{Y}, \tilde{Y}')\|_{\alpha,2\alpha}.$$

Satz 4.4.7. *Es seien Es $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}), \tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}, \tilde{\mathbb{X}}) \in \mathscr{C}^\alpha$ und $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$ sowie $(\tilde{Y}, \tilde{Y}') \in \mathscr{D}_{\tilde{X}}^{2\alpha}$. Wir nehmen an, dass eine Konstante $M > 0$ existiert, so dass*

$$\|\mathbf{X}\|_{\alpha,2\alpha} \le M, \quad |Y_0'| + \|(Y, Y')\|_{X,2\alpha} \le M,$$
$$\|\tilde{\mathbf{X}}\|_{\alpha,2\alpha} \le M, \quad |\tilde{Y}_0'| + \|(\tilde{Y}, \tilde{Y}')\|_{\tilde{X},2\alpha} \le M.$$

Wir setzen

$$(Z, Z') := \left(\int_0^\cdot Y_s \, d\mathbf{X}_s, Y\right) \in \mathscr{D}_X^{2\alpha},$$
$$(\tilde{Z}, \tilde{Z}') := \left(\int_0^\cdot \tilde{Y}_s \, d\tilde{\mathbf{X}}_s, \tilde{Y}\right) \in \mathscr{D}_{\tilde{X}}^{2\alpha}.$$

Dann gilt

$$d_{X,\tilde{X},2\alpha}\big((Z, Z'), (\tilde{Z}, \tilde{Z}')\big) \le C_M\Big(\varrho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) + |Y_0' - \tilde{Y}_0'| + d_{X,\tilde{X},2\alpha}\big((Y, Y'), (\tilde{Y}, \tilde{Y}')\big)\Big)$$

und

$$\|Z - \tilde{Z}\|_\alpha \le C_M\Big(\varrho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) + |Y_0 - \tilde{Y}_0| + |Y_0' - \tilde{Y}_0'| + d_{X,\tilde{X},2\alpha}\big((Y, Y'), (\tilde{Y}, \tilde{Y}')\big)\Big)$$

mit einer Konstanten $C_M = C(M, T, \alpha) > 0$.

Bemerkung 4.4.8. *Ergänzung zum Satz von Gubinelli (Satz 4.3.9): Folglich ist der lineare Operator*

$$(Y, Y') \mapsto \left(\int_0^\cdot Y_s \, d\mathbf{X}_s, Y \right)$$

zwischen den Banachräumen $\mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], L(V,W))$ *und* $\mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], W)$ *stetig.*

Bemerkung 4.4.9. *(Vergleiche Bemerkung 4.2.7) Ergänzung zum Satz von Lyons (Satz 4.2.6): Folglich ist die Abbildung*

$$(\mathscr{C}^\alpha, \varrho_\alpha) \to (\mathcal{C}^\alpha, \|\cdot\|_\alpha), \quad \mathbf{X} \mapsto \int_0^\cdot F(X_s) \, d\mathbf{X}_s$$

stetig.

Kapitel 5

Stochastische Integration und die Itô-Formel

5.1 Das Itô-Integral

Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ eine stochastische Basis, und darauf sei B eine $\mathbb{R}^d$-wertige Brown'sche Bewegung. Wir definieren $\mathbb{B} = \mathbb{B}^{\text{Itô}}$ durch

$$\mathbb{B}_{s,t} := \int_s^t B_{s,r} \otimes dB_r \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^{d \times d}, \quad s, t \in [0, T].$$

Weiterhin definieren wir $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\text{Itô}}$ durch $\mathbf{B} := (B, \mathbb{B})$. Im Folgenden sind die Zustandsräume $V = \mathbb{R}^d$, $W = \mathbb{R}^m$ und $\bar{W} = L(V, W) \cong \mathbb{R}^{m \times d}$.

Satz 5.1.1. *Es sei $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ beliebig, und es seien Y, Y' zwei stetige Prozesse, so dass $\mathbb{P}$-fast sicher $(Y, Y') \in \mathscr{D}_B^{2\alpha}$.*

(a) Das $\mathbb{R}^m$-wertige rauhe Integral

$$\int_0^t Y_s \, d\mathbf{B}_s = \lim_{|\Pi_t| \to 0} \sum_{[u,v] \in \Pi_t} (Y_u B_{u,v} + Y'_u \mathbb{B}_{u,v}), \quad t \in [0, T]$$

existiert $\mathbb{P}$-fast sicher.

(b) Falls Y und Y' adaptiert sind, dann gilt bis auf Ununterscheidbarkeit

$$\int_0^\cdot Y_s \, d\mathbf{B}_s = \int_0^\cdot Y_s \, dB_s.$$

Beweis. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $d = m = 1$.

(a) Nach Satz 3.2.6 gilt $\mathbb{P}$-fast sicher $\mathbf{B} \in \mathscr{C}^\alpha$. Also folgt die Existenz des rauhen Integrals aus dem Satz von Gubinelli (Satz 4.3.9).

(b) Durch Lokalisierung dürfen wir annehmen, dass $|Y'| \leq M$ für eine Konstante $M > 0$. Es sei $t \in [0, T]$ beliebig. Weiterhin sei $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Zerlegungfolge des Intervalls $[0, t]$ mit $|\Pi_n| \to 0$. Dann gilt

$$\sum_{[u,v] \in \Pi_n} Y_u B_{u,v} \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t Y_s \, dB_s.$$

Nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge erhalten wir

$$\sum_{[u,v] \in \Pi_n} Y_u B_{u,v} \xrightarrow{\text{f.s.}} \int_0^t Y_s \, dB_s.$$

Mit Teil (a) folgt $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \sum_{[u,v] \in \Pi_n} Y'_u \mathbb{B}_{u,v} &= \lim_{n \to \infty} \sum_{[u,v] \in \Pi_n} (Y_u B_{u,v} + Y'_u \mathbb{B}_{u,v}) - \lim_{n \to \infty} \sum_{[u,v] \in \Pi_n} Y_u B_{u,v} \\ &= \int_0^t Y_s \, d\mathbf{B}_s - \int_0^t Y_s \, dB_s. \end{aligned}$$

Es sei $\Pi = \{0 = \tau_0 < \ldots < \tau_N = t\}$ eine beliebige Partition. Wir definieren das zeit-diskrete $(\mathscr{F}_{\tau_n})$-Martingal $(S_n)_{n=0,\ldots,N}$ durch

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} Y'_{\tau_K} \mathbb{B}_{\tau_k, \tau_{k+1}}, \quad n = 0, \ldots, N.$$

Dann gilt mit einer Konstanten $C > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Bigg[\Bigg| \sum_{[u,v] \in \Pi} \mathbb{Y}'_u \mathbb{B}_{u,v} \Bigg|^2\Bigg] &= \mathbb{E}\Bigg[\Bigg| \sum_{k=0}^{N-1} (S_{k+1} - S_k) \Bigg|^2\Bigg] = \mathbb{E}\Bigg[\sum_{k=0}^{N-1} |S_{k+1} - S_k|^2\Bigg] \\ &\leq M^2 \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}\big[|\mathbb{B}_{\tau_k, \tau_{k+1}}|^2\big] \leq M^2 C \sum_{k=0}^{N-1} |\tau_{k+1} - \tau_k|^2 \\ &\leq M^2 C |\Pi| \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} |\tau_{k+1} - \tau_k|}_{=t} = M^2 C t |\Pi| \to 0 \end{aligned}$$

für $|\Pi| \to 0$. Also gilt

$$\sum_{[u,v] \in \Pi_n} \mathbb{Y}'_u \mathbb{B}_{u,v} \xrightarrow{L^2} 0,$$

und nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge

$$\sum_{[u,v]\in\Pi_n} \mathbb{Y}'_u \mathbb{B}_{u,v} \overset{\text{f.s.}}{\to} 0.$$

$\square$

5.2 Das Stratonovich-Integral

Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ eine stochastische Basis, und darauf sei B eine $\mathbb{R}^d$-wertige Brown'sche Bewegung. Wir definieren $\mathbb{B} = \mathbb{B}^{\text{Strat}}$ durch

$$\mathbb{B}^{\text{Strat}}_{s,t} := \int_s^t B_{s,r} \otimes \circ dB_r \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^{d\times d}, \quad s,t \in [0,T].$$

Weiterhin definieren wir $\mathbf{B}^{\text{Strat}}$ durch $\mathbf{B}^{\text{Strat}} := (B, \mathbb{B}^{\text{Strat}})$.

Satz 5.2.1. *Es sei $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ beliebig, und es seien Y, Y' zwei stetige Prozesse, so dass $\mathbb{P}$-fast sicher $(Y, Y') \in \mathscr{D}^{2\alpha}_B$.*

(a) Das $\mathbb{R}^m$-wertige rauhe Integral

$$\int_0^t Y_s \, d\mathbf{B}^{\text{Strat}}_s = \lim_{|\Pi_t|\to 0} \sum_{[u,v]\in\Pi_t} (Y_u B_{u,v} + Y'_u \mathbb{B}^{\text{Strat}}_{u,v}), \quad t \in [0,T]$$

existiert $\mathbb{P}$-fast sicher.

(b) Falls Y und Y' Semimartingale sind, dann gilt bis auf Ununterscheidbarkeit

$$\int_0^\cdot Y_s \, d\mathbf{B}^{\text{Strat}}_s = \int_0^\cdot Y_s \circ dB_s.$$

Beweis. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $d = m = 1$.

(a) Nach Satz 3.3.4 gilt $\mathbb{P}$-fast sicher $\mathbf{B}^{\text{Strat}} \in \mathscr{C}^\alpha_g$. Also folgt die Existenz des rauhen Integrals aus dem Satz von Gubinelli (Satz 4.3.9).

(b) Nach Lemma 3.3.2(a) gilt

$$\mathbb{B}^{\text{Strat}}_{s,t} = \mathbb{B}^{\text{Itô}}_{s,t} + f_{s,t} \quad \text{für alle } s,t \in [0,T],$$

wobei die Funktion $f : [0,T] \to V \otimes V$ gegeben ist durch

$$f_t = \frac{t}{2}, \quad t \in [0,T].$$

Es sei $t \in [0,T]$ beliebig. Nach Beispiel 4.3.10 gilt

$$\int_0^t Y_s \, d\mathbf{B}_s^{\mathrm{Strat}} = \int_0^t Y_s \, d\mathbf{B}_s^{\mathrm{Itô}} + \int_0^t Y_s' \, df_s.$$

Es sei Π eine Partition des Intervalls $[0,t]$. Es gilt

$$Y_{u,v} = Y_u' B_{u,v} + R_{u,v}^Y, \quad u,v \in [0,t].$$

Also folgt

$$\begin{aligned}\sum_{[u,v]\in\Pi} Y_{u,v} B_{u,v} &= \sum_{[u,v]\in\Pi} \big((Y_u' B_{u,v}) B_{u,v} + R_{u,v}^Y B_{u,v}\big) \\ &= \sum_{[u,v]\in\Pi} Y_u'(B_{u,v} \otimes B_{u,v}) + \sum_{[u,v]\in\Pi} R_{u,v}^Y B_{u,v}.\end{aligned}$$

Hierbei haben wir benutzt, dass im Sinne der Einbettung

$$L(V, L(V,W)) \hookrightarrow L(V \otimes V, W)$$

gilt

$$y x_1 x_2 = y(x_1 \otimes x_2) \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in V \text{ und } y \in L(V, L(V,W)).$$

Es sei $q > 6$ beliebig. Nach den Überlegungen im Beweis von Satz 3.2.6, und dem Satz von Kolmogorov-Chentsov für rauhe Pfade (Satz 3.1.3) existiert eine Zufallsvariable $K_\alpha \in \mathscr{L}^q$, so dass $\mathbb{P}$-fast sicher gilt

$$|B_{u,v}| \le K_\alpha |v-u|^\alpha, \quad u,v \in [0,t].$$

Wegen $\|R^Y\|_{2\alpha} < \infty$ folgt $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{[u,v]\in\Pi} R_{u,v}^Y B_{u,v}\Big| &\le \sum_{[u,v]\in\Pi} |R_{u,v}^Y B_{u,v}| \le \sum_{[u,v]\in\Pi} \|R^Y\|_{2\alpha} |v-u|^{2\alpha} K_\alpha |v-u|^\alpha \\ &= \|R^Y\|_{2\alpha} K_\alpha \sum_{[u,v]\in\Pi} |v-u|^{3\alpha} \le \|R^Y\|_{2\alpha} K_\alpha |\Pi|^{3\alpha-1} \sum_{[u,v]\in\Pi} |v-u| \\ &= \|R^Y\|_{2\alpha} K_\alpha t |\Pi|^{3\alpha-1} \to 0\end{aligned}$$

für $|\Pi| \to 0$, da $\alpha > \frac{1}{3}$. Nach Lemma 3.3.2 gilt

$$B_{u,v} \otimes B_{u,v} = 2\,\mathrm{Sym}(\mathbb{B}_{u,v}^{\mathrm{Strat}}) = 2\,\mathrm{Sym}(\mathbb{B}_{u,v}^{\mathrm{Itô}}) + (v-u).$$

Wie im Beweis von Satz 5.1.1 folgt also

$$\frac{1}{2}[Y,B]_t = \frac{1}{2}\lim_{|\Pi|\to 0}\sum_{[u,v]\in\Pi} Y_{u,v}B_{u,v} = \underbrace{\lim_{|\Pi|\to 0}\sum_{[u,v]\in\Pi} Y'_u\,\mathrm{Sym}(\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v})}_{=0} + \frac{1}{2}\sum_{[u,v]\in\Pi} Y'_u(v-u)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t Y'_s\,ds = \int_0^t Y'_s\,df_s.$$

Also folgt mit Satz 5.1.1(b)

$$\begin{aligned}\int_0^t Y_s\,d\mathbf{B}^{\text{Strat}}_s &= \int_0^t Y_s\,d\mathbf{B}^{\text{Itô}}_s + \int_0^t Y'_s\,df_s \\ &= \int_0^t Y_s\,dB_s + \frac{1}{2}[Y,B]_t = \int_0^t Y_s\circ dB_s.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.2.2. *Wie der Beweis von Satz 5.2.1 zeigt, gilt*

$$\begin{aligned}\int_0^t Y_s\,d\mathbf{B}^{\text{Strat}}_s &= \int_0^t Y_s\,d\mathbf{B}^{\text{Itô}}_s + \frac{1}{2}\int_0^t Y'_s\,ds. \\ &= \int_0^t Y_s\,d\mathbf{B}^{\text{Itô}}_s + \frac{1}{2}[Y,B]_t, \quad t\in[0,T].\end{aligned}$$

(Vergleiche Beispiel 4.3.10.)

5.3 Die Itô-Formel

Satz 5.3.1 (Fundamentalsatz)**.** *Es seien $X\in C^1([0,T],V)$ und $F\in C^1(V,W)$. Dann gilt*

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t DF(X_s)dX_s, \quad t\in[0,T].$$

Beweis. Nach dem Hauptsatz und der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned}F(X_t) &= F(X_0) + \int_0^t \frac{d}{ds}F(X_s)ds = F(X_0) + \int_0^t DF(X_s)\dot{X}_s ds \\ &= F(X_0) + \int_0^t DF(X_s)dX_s.\end{aligned}$$

□

Lemma 5.3.2. *Es sei $T \in L(V \otimes V, W)$ ein symmetrischer linearer Operator; das heißt*

$$Tx = Tx^* \quad \text{für alle } x \in V \otimes V.$$

Dann gilt $Tx = 0$ für jedes antisymmetrische $x \in V \otimes V$.

Beweis. Übung. □

Lemma 5.3.3. *Es seien $F \in C^2(V, W)$ und $(X, \mathbb{A}) \in \mathcal{C}^\alpha \oplus \mathcal{C}_2^{2\alpha}$, so dass $\mathbb{A}$ antisymmetrisch ist. Dann existiert das W-wertige Young-Integral*

$$\int_0^t D^2 F(X_s) d\mathbb{A}_s = \lim_{|\Pi_t| \to 0} \sum_{[u,v] \in \Pi_t} D^2 F(X_u) \mathbb{A}_{u,v}, \quad t \in [0, T]$$

und es gilt

$$\int_0^\cdot D^2 F(X_s) d\mathbb{A}_s = 0.$$

Beweis. Für jedes $x \in V$ ist $D^2 F(x) \in L(V \otimes V, W)$ ein symmetrischer linearer Operator. Also folgt die Behauptung aus Lemma 5.3.2. □

Definition 5.3.4. *Es sei $\alpha > \frac{1}{3}$ beliebig. Wir definieren den Raum $\mathscr{C}_r^\alpha([0, T], V)$ aller <u>reduzierten rauhen Pfade</u> (über V) als die Menge aller Paare $\mathbf{X} = (X, \mathbb{S})$ bestehend aus Funktionen $X : [0, T] \to V$ und $\mathbb{S} : [0, T]^2 \to \mathrm{Sym}(V \otimes V)$, so dass*

$$\|X\|_\alpha := \sup_{\substack{s,t \in [0,T] \\ s \neq t}} \frac{|X_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} < \infty,$$

$$\|\mathbb{S}\|_{2\alpha} := \sup_{\substack{s,t \in [0,T] \\ s \neq t}} \frac{|\mathbb{S}_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}} < \infty,$$

und die reduzierte Chen-Gleichung

$$\mathbb{S}_{s,t} - \mathbb{S}_{s,u} - \mathbb{S}_{u,t} = \mathrm{Sym}(X_{s,u} \otimes X_{u,t}) \quad \text{für alle } s, u, t \in [0, T]$$

erfüllt ist. Wir benutzen auch die Kurznotationen $\mathscr{C}_r^\alpha$.

Bemerkung 5.3.5. *Es sei $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ ein rauher Pfad. Dann können wir den Prozess 2. Ordnung zerlegen als $\mathbb{X} = \mathbb{S} + \mathbb{A}$, wobei $\mathbb{S} = \mathrm{Sym}(\mathbb{X})$ und $\mathbb{A} = \mathrm{Anti}(\mathbb{X})$.*

Lemma 5.3.6. *Für jeden rauhen Pfad $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ gilt $(X, \mathbb{S}) \in \mathscr{C}_r^\alpha$.*

Beweis. Da $\mathrm{Sym} \in L(V \otimes V)$ eine stetige lineare Projektion ist, gilt für alle $s, t \in [0, T]$

$$|\mathbb{S}_{s,t}| = |\mathrm{Sym}(X_{s,t})| \leq |X_{s,t}|,$$

und daher $\|\mathbb{S}\|_{2\alpha} < \infty$. Weiterhin gilt nach der Chen-Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{s,t} - \mathbb{S}_{s,u} - \mathbb{S}_{u,t} &= \mathrm{Sym}(\mathbb{X}_{s,t} - \mathbb{X}_{s,u} - \mathbb{X}_{u,t}) \\ &= \mathrm{Sym}(X_{s,u} \otimes X_{u,t}) \quad \text{für alle } s, u, t \in [0, T]. \end{aligned}$$

□

Definition 5.3.7. *Für einen Pfad $X : [0, T] \to V$ definieren wir $\bar{\mathbb{S}} : [0, T]^2 \to V \otimes V$ durch*

$$\bar{\mathbb{S}}_{s,t} := \frac{1}{2} X_{s,t} \otimes X_{s,t} \quad \text{für alle } s, t \in [0, T].$$

Lemma 5.3.8. *Für jeden geometrischen rauhen Pfad $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}_g^\alpha$ ist der reduzierte rauhe Pfad $(X, \mathbb{S})$ aus Lemma 5.3.6 gegeben durch $\mathbb{S} = \bar{\mathbb{S}}$.*

Beweis. Für $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}_g^\alpha$ gilt

$$\mathbb{S}_{s,t} = \mathrm{Sym}(\mathbb{X}_{s,t}) = \frac{1}{2} X_{s,t} \otimes X_{s,t} = \bar{\mathbb{S}}_{s,t}.$$

□

Lemma 5.3.9. *Es sei $X \in \mathcal{C}^\alpha$ für ein $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$.*

(a) Es gilt $(X, \bar{\mathbb{S}}) \in \mathscr{C}_r^\alpha$.

(b) Für jedes $\gamma \in \mathcal{C}^{2\alpha}([0, T], \mathrm{Sym}(V \otimes V))$ gilt $(X, \mathbb{S}) \in \mathscr{C}_r^\alpha$, wobei $\mathbb{S}$ gegeben ist durch

$$\mathbb{S}_{s,t} = \bar{\mathbb{S}}_{s,t} + \frac{1}{2}(\gamma_t - \gamma_s) = \frac{1}{2}(X_{s,t} \otimes X_{s,t} + \gamma_{s,t}) \quad \text{für alle } s, t \in [0, T].$$

Beweis. Übung. □

Lemma 5.3.10. *Es sei $(X, \mathbb{S}) \in \mathscr{C}_r^\alpha$ für ein $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ beliebig. Dann existiert ein $\gamma \in \mathcal{C}^{2\alpha}([0, T], \mathrm{Sym}(V \otimes V))$, so dass*

$$\mathbb{S}_{s,t} = \bar{\mathbb{S}}_{s,t} + \frac{1}{2}(\gamma_t - \gamma_s) = \frac{1}{2}(X_{s,t} \otimes X_{s,t} + \gamma_{s,t}) \quad \text{für alle } s, t \in [0, T].$$

Beweis. Übung. □

Definition 5.3.11. *Es sei* $\mathbf{X} = (X, \mathbb{S}) \in \mathscr{C}_r^\alpha$.

(a) Wir definieren $[\mathbf{X}] : [0,T] \to \mathrm{Sym}(V \otimes V)$ *durch*

$$[\mathbf{X}]_t := X_{0,t} \otimes X_{0,t} - 2\mathbb{S}_{0,t}, \quad t \in [0,T].$$

(b) Wir definieren $[\mathbf{X}] : [0,T]^2 \to \mathrm{Sym}(V \otimes V)$ *durch*

$$[\mathbf{X}]_{s,t} := X_{s,t} \otimes X_{s,t} - 2\mathbb{S}_{s,t}, \quad s,t \in [0,T].$$

Lemma 5.3.12. *Es seien* $\mathbf{X} = (X, \mathbb{S}) \in \mathscr{C}_r^\alpha$ *und* $\gamma \in \mathcal{C}^{2\alpha}$ *die Funktion aus Lemma 5.3.10.*

(a) Es gilt $[\mathbf{X}]_{s,t} = -\gamma_{s,t}$ *für alle* $s,t \in [0,T]$*, und folglich* $[\mathbf{X}] \in \mathcal{C}^{2\alpha}$

(b) Es gilt $[\mathbf{X}]_{s,t} = [\mathbf{X}]_t - [\mathbf{X}]_s$ *für alle* $s,t \in [0,T]$.

(c) Es gilt $\bar{\mathbb{S}}_{s,t} = \mathbb{S}_{s,t} + \frac{1}{2}[\mathbf{X}]_{s,t}$ *für alle* $s,t \in [0,T]$.

(d) Falls $\mathbb{S} = \bar{\mathbb{S}}$*, dann gilt* $[\mathbf{X}] = 0$.

Beweis. Übung. □

Korollar 5.3.13. *Es sei* $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}_g^\alpha$ *ein geometrischer rauher Pfad. Wir setzen* $\bar{\mathbf{X}} := (X, \mathbb{S}) \in \mathscr{C}_r^\alpha$ *gemäß Lemma 5.3.6. Dann gilt* $[\bar{\mathbf{X}}] = 0$.

Beweis. Nach Lemma 5.3.8 gilt $\mathbb{S} = \bar{\mathbb{S}}$, und mit Lemma 5.3.12(d) folgt $[\bar{\mathbf{X}}] = 0$. □

Satz 5.3.14 (Itô-Formel für reduzierte rauhe Pfade)**.** *Es seien* $F \in C_b^3(V,W)$ *und* $\mathbf{X} = (X, \mathbb{S}) \in \mathscr{C}_r^\alpha$ *für ein* $\alpha > \frac{1}{3}$*. Dann gilt*

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t DF(X_s) d\mathbf{X}_s + \frac{1}{2}\int_0^t D^2F(X_s) d[\mathbf{X}]_s, \quad t \in [0,T].$$

Hierbei ist das 1. Integral ein wohldefiniertes W*-wertiges rauhes Integral*

$$\int_0^t DF(X_s) d\mathbf{X}_s = \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{[u,v] \in \Pi} \big(DF(X_u) X_{u,v} + D^2F(X_u)\mathbb{S}_{u,v} \big),$$

während das 2. Integral ein wohldefiniertes W*-wertiges Young-Integral ist.*

Beweis. Da D^2F Lipschitz-stetig und $X \in \mathcal{C}^\alpha$, gilt mit einer Konstanten $L > 0$

$$|D^2F(X_v) - D^2F(X_u)| \le L|X_v - X_u| \le L\|X\|_\alpha |u-v|^\alpha,$$

und damit $D^2F(X) \in \mathcal{C}^\alpha$. Außerdem gilt nach Lemma 5.3.12(a), dass $[X] \in \mathcal{C}^{2\alpha}$. Wegen $\alpha + 2\alpha = 3\alpha > 1$ folgt mit Satz 4.1.1 die Existenz des Young-Integrals

$$\int_0^t D^2F(X_s)d[\mathbf{X}]_s = \lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\Pi} D^2F(X_u)[\mathbf{X}]_{u,v}, \quad t \in [0,T].$$

Es sei $t \in [0,T]$ beliebig. Weiterhin sei Π eine Zerlegung des Intervalls $[0,t]$. Nach Lemma 5.3.12(c) gilt $\bar{\mathbb{S}}_{u,v} = \mathbb{S}_{u,v} + \frac{1}{2}[\mathbf{X}]_{u,v}$. Mit dem Satz von Taylor (Bemerkung 1.1.49(b)) folgt

$$\begin{aligned}
F(X_t) - F(X_0) &= \sum_{[u,v]\in\Pi} \big(F(X_v) - F(X_u)\big) \\
&= \sum_{[u,v]\in\Pi} \left(DF(X_u)X_{u,v} + \frac{1}{2}D^2F(X_u)(X_{u,v}, X_{u,v}) + R(v-u)\right) \\
&= \sum_{[u,v]\in\Pi} \left(DF(X_u)X_{u,v} + \frac{1}{2}D^2F(X_u)(X_{u,v} \otimes X_{u,v}) + R(v-u)\right) \\
&= \sum_{[u,v]\in\Pi} \big(DF(X_u)X_{u,v} + D^2F(X_u)\bar{\mathbb{S}}_{u,v} + R(v-u)\big) \\
&= \sum_{[u,v]\in\Pi} \big(DF(X_u)X_{u,v} + D^2F(X_u)\mathbb{S}_{u,v}\big) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{[u,v]\in\Pi} D^2F(X_u)[\mathbf{X}]_{u,v} + \sum_{[u,v]\in\Pi} R(v-u),
\end{aligned}$$

wobei

$$|R(v-u)| \leq \frac{1}{2}\|D^2F\|_\infty |v-u|^2.$$

Hierbei haben wir benutzt, dass im Sinne der Einbettung

$$L(V, L(V,W)) \hookrightarrow L(V \otimes V, W)$$

gilt

$$yx_1x_2 = y(x_1 \otimes x_2) \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in V \text{ und } y \in L(V, L(V,W)).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{[u,v]\in\Pi} R(v-u)\right| &\leq \sum_{[u,v]\in\Pi} |R(v-u)| \leq \frac{1}{2}\|D^2F\|_\infty \sum_{[u,v]\in\Pi} |v-u|^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\|D^2F\|_\infty |\Pi| \sum_{[u,v]\in\Pi} |v-u| = \frac{1}{2}\|D^2F\|_\infty t|\Pi| \to 0
\end{aligned}$$

für $|\Pi| \to 0$. $\square$

Korollar 5.3.15. *Es seien $F \in C_b^3(V,W)$ und $\mathbf{X} = (X,\mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ für ein $\alpha > \frac{1}{3}$. Es sei $\mathbb{X} = \mathbb{S} + \mathbb{A}$ die Zerlegung aus Bemerkung 5.3.5. Wir setzen $\bar{\mathbf{X}} := (X,\mathbb{S}) \in \mathscr{C}_r^\alpha$ gemäß Lemma 5.3.6. Dann gilt*

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t DF(X_s)d\mathbf{X}_s + \frac{1}{2}\int_0^t D^2F(X_s)d[\bar{\mathbf{X}}]_s, \quad t \in [0,T].$$

Hierbei ist das 1. Integral ein wohldefiniertes W-wertiges rauhes Intergal im Sinne des Satzes von Gubinelli (Satz 4.3.9)

$$\int_0^t DF(X_s)d\mathbf{X}_s = \lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\Pi} \big(DF(X_u)X_{u,v} + D^2F(X_u)\mathbb{X}_{u,v}\big),$$

während das 2. Integral ein wohldefiniertes W-wertiges Young-Integral ist.

Beweis. Nach Itô-Formel für reduzierte rauhe Pfade (Satz 5.3.14) gilt

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t DF(X_s)d\bar{\mathbf{X}}_s + \frac{1}{2}\int_0^t D^2F(X_s)d[\bar{\mathbf{X}}]_s, \quad t \in [0,T].$$

und nach Lemma 5.3.3 gilt

$$\int_0^t DF(X_s)d\bar{\mathbf{X}}_s = \int_0^t DF(X_s)d\mathbf{X}_s.$$

□

Korollar 5.3.16. *Es seien $F \in C_b^3(V,W)$ und $\mathbf{X} = (X,\mathbb{X}) \in \mathscr{C}_g^\alpha$ für ein $\alpha > \frac{1}{3}$. Dann gilt*

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t DF(X_s)d\mathbf{X}_s, \quad t \in [0,T].$$

Hierbei ist das 1. Integral ein wohldefiniertes W-wertiges rauhes Intergal im Sinne des Satzes von Gubinelli (Satz 4.3.9)

$$\int_0^t DF(X_s)d\mathbf{X}_s = \lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\Pi} \big(DF(X_u)X_{u,v} + D^2F(X_u)\mathbb{X}_{u,v}\big).$$

Beweis. Nach Korollar 5.3.13 gilt $[\bar{\mathbf{X}}] = 0$. Also folgt die Formel aus Korollar 5.3.15.

□

Beispiel 5.3.17. *Es seien* $\mathbf{B} = (B, \mathbb{B})$ *eine* $\mathbb{R}^d$*-wertige Brown'sche Bewegung mit* $\mathbb{B} = \mathbb{B}^{\text{Itô}}$, *und* $\bar{\mathbf{B}} = (B, \mathbb{S})$ *gemäß Lemma 5.3.6. Nach Lemma 3.2.7 gilt*

$$\mathbb{S}_{0,t} = \operatorname{Sym}(\mathbb{B}_{0,t}) = \frac{1}{2}\big(B_t \otimes B_t - t \cdot \mathrm{Id}\big),$$

und daher

$$[\mathbf{B}]_t = B_{0,t} \otimes B_{0,t} - 2\mathbb{S}_{0,t} = t \cdot \mathrm{Id}.$$

Nach Korollar 5.3.15 und Satz 5.1.1(b) gilt für $F \in C_b^3(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} F(B_t) &= F(B_0) + \int_0^t DF(B_s) d\mathbf{B}_s + \frac{1}{2}\int_0^t D^2F(B_s) d[\bar{\mathbf{B}}]_s \\ &= F(B_0) + \int_0^t DF(B_s) dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t D^2F(B_s)\, \mathrm{Id}\, ds \\ &= F(B_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_i F(B_s) dB_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_{ii} F(B_s) ds, \quad t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Beispiel 5.3.18. *Es sei* B *eine* $\mathbb{R}^d$*-wertige Brown'sche Bewegung. Wir setzen* $\mathbf{B} := (B, \mathbb{B}^{\text{Strat}})$ *. Dies ist ein geometrischer rauher Pfad. Nach Korollar 5.3.16 und Satz 5.2.1 folgt für* $F \in C_b^3(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} F(B_t) &= F(B_0) + \int_0^t DF(B_s) d\mathbf{B}_s \\ &= F(B_0) + \int_0^t DF(B_s) \circ dB_s \\ &= F(B_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_i F(B_s) \circ dB_s^i, \quad t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Korollar 5.3.19. *Es seien* $F \in C_b^3(V, W)$ *und* $X \in \mathcal{C}^\alpha$ *für ein* $\alpha > \frac{1}{3}$. *Dann gilt*

$$F(X_t) = F(X_0) + \lim_{|\Pi_t| \to 0} \sum_{[u,v] \in \Pi_t} \left(DF(X_u) X_{u,v} + \frac{1}{2} D^2 F(X_u)(X_{u,v} \otimes X_{u,v}) \right), \quad t \in [0,T].$$

Beweis. Nach Lemma 5.3.9(a) gilt $\mathbf{X} := (X, \bar{\mathbb{S}}) \in \mathscr{C}_r^\alpha$, und nach Lemma 5.3.12(d) gilt $[\mathbf{X}] = 0$. Nach der Itô-Formel für reduzierte rauhe Pfade (Satz 5.3.14) gilt für jedes

$t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
F(X_t) &= F(X_0) + \int_0^t DF(X_s)d\mathbf{X}_s + \frac{1}{2}\int_0^t D^2F(X_s)d[\mathbf{X}]_s \\
&= F(X_0) + \lim_{|\Pi_t|\to 0} \sum_{[u,v]\in\Pi_t} \big(DF(X_u)X_{u,v} + D^2F(X_u)\mathbb{S}_{u,v}\big) \\
&= F(X_0) + \lim_{|\Pi_t|\to 0} \sum_{[u,v]\in\Pi_t} \Big(DF(X_u)X_{u,v} + \frac{1}{2}D^2F(X_u)(X_{u,v}\otimes X_{u,v})\Big).
\end{aligned}$$

□

Definition 5.3.20. *Es sei $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Partitionen von $[0,T]$ mit $|\Pi_n| \to 0$. Dann hat eine Funktion $X : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ endliche quadratische Variation entlang $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls für jedes $t \in [0,T]$ die Grenzwerte*

$$[X^i, X^j]_t := \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\Pi_n} (X^i_{v\wedge t} - X^i_{u\wedge t})(X^j_{v\wedge t} - X^j_{u\wedge t}), \quad i,j = 1,\dots,d$$

existieren.

Lemma 5.3.21. *Es sei $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Partitionen von $[0,T]$ mit $|\Pi_n| \to 0$, und es sei $X : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ eine Funktion mit endlicher quadratische Variation entlang $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

(a) Die Funktion $[X,X] : [0,T] \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ ist von beschränkter Variation.

(b) Falls $[X,X]$ stetig ist, dann gilt für jede stetige Funktion $G : [0,T] \to L(\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)$, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{[u,v]\in\Pi_n \\ u<t}} G(u)(X_{u,v}\otimes X_{u,v}) = \int_0^t G(u)d[X,X]_u \in \mathbb{R}^e, \quad t \in [0,T].$$

Beweis.

(a) Es sei $i = 1,\dots,d$ beliebig. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion

$$t \mapsto \sum_{[u,v]\in\Pi_n} (X^i_{v\wedge t} - X^i_{u\wedge t})^2$$

monoton wachsend. Also ist auch der Limes $[X^i, X^i]$ monoton wachsend. Nun seien $i,j = 1,\dots,d$ beliebig. Wegen der Polarisierungsformel ist

$$[X^i, X^j] = \frac{1}{4}\big([X^i + X^j, X^i + X^j] - [X^i - X^j, X^i - X^j]\big)$$

von beschränkter Variation.

(b) Durch Polarisierung dürfen wir annehmen, dass $d = e = 1$; das heißt

$$X, [X,X], G : [0,T] \to \mathbb{R}.$$

Wir zeigen

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{[u,v]\in\Pi_n \\ u<t}} G(u) X_{u,v}^2 = \int_0^t G(u) d[X,X]_u, \quad t \in [0,T].$$

Es sei $t \in [0,T]$ beliebig. Wir definieren die Maße $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ durch

$$\mu_n := \sum_{\substack{[u,v]\in\Pi_n \\ u<t}} X_{u,v}^2 \delta_u.$$

Dann sind die Verteilungsfunktionen gegeben durch

$$F_n(s) = \sum_{\substack{[u,v]\in\Pi_n \\ u\leq s}} Y_{u,v}^2,$$

und es gilt

$$\sum_{\substack{[u,v]\in\Pi_n \\ u<t}} G(u) X_{u,v}^2 = \int_0^t G(u) d\mu_n(u).$$

Weiterhin definieren wir das Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ durch $\mu((-\infty,0])) := 0$ und

$$\mu((u,v]) := [X,X]_{v\wedge t} - [X,X]_{u\wedge t}, \quad 0 \leq u < v.$$

Dann ist die Verteilungsfunktion gegeben durch

$$F = [X,X]\mathbb{1}_{[0,t]} + [X,X]_t \mathbb{1}_{(t,\infty)},$$

und es gilt

$$\int_0^t G(u) d[X,X]_u = \int_0^t G(u) d\mu(u).$$

Es gilt $F_n \to F$. Da F stetig ist, folgt $\mu_n \to \mu$ schwach. Da die stetige Funktion G auf dem kompakten Intervall $[0,t]$ beschränkt ist, gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t G(u) d\mu_n(u) = \int_0^t G(u) d\mu(u).$$

□

Satz 5.3.22 (Itô-Föllmer-Formel). *Es seien* $F \in C_b^3(V,W)$ *und* $X \in \mathcal{C}^\alpha$ *für ein* $\alpha > \frac{1}{3}$. *Weiterhin sei* $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Partitionen von* $[0,T]$ *mit* $|\Pi_n| \to 0$, *so dass* X *endliche quadratische Variation entlang* $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *hat und* $[X,X]$ *stetig ist. Dann gilt*

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t DF(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t D^2F(X_s)d[X,X]_s, \quad t \in [0,T].$$

Hierbei ist

$$\int_0^t DF(X_s)dX_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{[u,v]\in\Pi_n \\ u<t}} DF(X_u)X_{u,v}, \quad t \in [0,T]$$

ein wohldefiniertes Riemann-Stieltjes-Integral.

Beweis. Es sei $t \in [0,T]$ beliebig. Nach Korollar 5.3.19 und Lemma 5.3.21 gilt

$$\begin{aligned} F(X_t) &= F(X_0) + \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{[u,v]\in\Pi_n \\ u<t}} \left(DF(X_u)X_{u,v} + \frac{1}{2}D^2F(X_u)(X_{u,v}\otimes X_{u,v})\right) \\ &= F(X_0) + \int_0^t DF(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t D^2F(X_s)d[X,X]_s. \end{aligned}$$

□

Kapitel 6

Wahrhaftig rauhe Pfade

6.1 Resultate aus der Stochastischen Analysis

Es sei $\mathbb{B} = (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ eine stochastische Basis.

Satz 6.1.1. *Es sei S ein stetiges Semimartingal mit Semimartingal-Zerlegung $S = S_0 + M + A$.*

(a) Ist $S = S_0 + N + B$ eine weitere Semimartingal-Zerlegung, dann gilt $M = N$ und $A = B$ bis auf Ununterscheidbarkeit.

(b) Es sei τ eine Stoppzeit, so dass $S^\tau = 0$. Dann gilt $M^\tau = [M, M]^\tau = A^\tau = 0$.

Beweis.

(a) Satz 1.3.28.

(b) Es gilt $S^\tau = S_0 + M^\tau + A^\tau = 0$. Die Klassen $\mathcal{S}$, $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ und $\mathcal{V}$ sind stabil unter Stoppen. Also folgt aus Teil (a), dass $M^\tau = A^\tau = 0$. Daraus folgt $[M, M]^\tau = [M^\tau, M^\tau] = 0$.

□

Satz 6.1.2. *Es sei B eine $\mathbb{R}^d$-wertige Brown'sche Bewegung, es seien Y, $\tilde{Y}$ stetige, adaptierte $\mathbb{R}^{d\times e}$-wertige Prozesse, und es seien Z, $\tilde{Z}$ stetige, adaptierte $\mathbb{R}^e$-wertige Prozesse. Weiterhin sei $\tau > 0$ eine positive Stoppzeit, so dass bis auf Ununterscheidbarkeit*

$$\left(\int_0^\cdot Y_s dB_s + \int_0^\cdot Z_s ds \right)^\tau = \left(\int_0^\cdot \tilde{Y}_s dB_s + \int_0^\cdot \tilde{Z}_s ds \right)^\tau.$$

Dann gilt auch $Y^\tau = \tilde{Y}^\tau$ und $Z^\tau = \tilde{Z}^\tau$ bis auf Ununterscheidbarkeit.

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $e = 1$. Wegen der Linearität der Integrale dürfen wir außerdem annehmen, dass bis auf Ununterscheidbarkeit

$$\left(\int_0^{\cdot} Y_s dB_s + \int_0^{\cdot} Z_s ds \right)^{\tau} = 0.$$

Wegen

$$\left(\int_0^{\cdot} Y_s dB_s + \int_0^{\cdot} Z_s ds \right)^{\tau} = \int_0^{\cdot} Y_s \mathbb{1}_{[\![0,\tau]\!]}(s) dB_s + \int_0^{\cdot} Z_s \mathbb{1}_{[\![0,\tau]\!]}(s) ds$$

dürfen wir weiterhin annehmen, dass $\tau = \infty$; das heißt

$$\int_0^{\cdot} Y_s dB_s + \int_0^{\cdot} Z_s ds = 0.$$

Nach Satz 6.1.1 gilt bis auf Ununterscheidbarkeit

$$\left[\int_0^{\cdot} Y_s dB_s, \int_0^{\cdot} Y_s dB_s \right] = 0.$$

Wegen $[B^k, B^l]_s = \delta_{lk} s$ für $k, l = 1, \ldots, d$ folgt bis auf Ununterscheidbarkeit

$$\begin{aligned}
\left[\int_0^{\cdot} Y_s dB_s, \int_0^{\cdot} Y_s dB_s \right] &= \left[\sum_{k=1}^{d} \int_0^{\cdot} Y_s^k dB_s^k, \sum_{l=1}^{d} \int_0^{\cdot} Y_s^l dB_s^l \right] \\
&= \sum_{k=1}^{d} \sum_{l=1}^{d} \left[\int_0^{\cdot} Y_s^k dB_s^k, \int_0^{\cdot} Y_s^l dB_s^l \right] = \sum_{k=1}^{d} \sum_{l=1}^{d} \int_0^{\cdot} Y_s^k Y_s^l d[B^k, B^l]_s \\
&= \sum_{k=1}^{d} \int_0^{\cdot} (Y_s^k)^2 ds.
\end{aligned}$$

Nun folgt bis auf Ununterscheidbarkeit

$$\sum_{k=1}^{d} (Y^k)^2 = 0,$$

und damit $Y^1 = \ldots = Y^d = 0$. Daraus folgt nun bis auf Ununterscheidbarkeit

$$\int_0^{\cdot} Z_s ds = 0,$$

und daher $Z = 0$ bis auf Ununterscheidbarkeit. $\square$

6.2 Eindeutigkeit der Gubinelli-Ableitung

Wir fixieren ein $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$.

Lemma 6.2.1. *Es seien $X \in \mathcal{C}^\alpha([0,T],\mathbb{R})$ und $(Y,Y'),(Y,\tilde{Y}') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$. Weiterhin sei $s \in [0,T)$ beliebig. Wir nehmen an, dass eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,T]$ mit $t_n \downarrow s$ existiert, so dass*

$$\frac{|X_{s,t_n}|}{|t_n - s|^{2\alpha}} \to \infty.$$

Mit anderen Worten, es gilt

$$\limsup_{t\downarrow s} \frac{|X_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}} = \infty.$$

Dann gilt $Y'_s = \tilde{Y}'_s$.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $X_{s,t_n} \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt für alle $n \geq n_0$

$$Y'_s = \frac{Y_{s,t_n} - R^Y_{s,t_n}}{X_{s,t_n}} = \frac{Y_{s,t_n}}{X_{s,t_n}} - \underbrace{\frac{R^Y_{s,t_n}}{|t_n - s|^{2\alpha}}}_{|\cdot| \leq \|R^Y\|_{2\alpha}} \underbrace{\frac{|t_n - s|^{2\alpha}}{X_{s,t_n}}}_{\to 0},$$

und daher

$$Y'_s = \lim_{n\to\infty} \frac{Y_{s,t_n}}{X_{s,t_n}}.$$

Analog gilt

$$\tilde{Y}'_s = \lim_{n\to\infty} \frac{Y_{s,t_n}}{X_{s,t_n}},$$

und daher $Y'_s = \tilde{Y}'_s$. □

Definition 6.2.2. *Es sei $s \in [0,T)$ beliebig. Ein Pfad $X \in \mathcal{C}^\alpha$ heißt <u>rauh zur Zeit s</u>, falls*

$$\limsup_{t\downarrow s} \frac{|v'(X_{s,t})|}{|t-s|^{2\alpha}} = \infty \quad \text{für alle } v \in V' \setminus \{0\}.$$

Definition 6.2.3. *Ein Pfad $X \in \mathcal{C}^\alpha$ heißt <u>wahrhaftig rauh</u>, falls eine dichte Teilmenge $D \subset [0,T]$ existiert, so dass X für jedes $s \in D$ rauh zur Zeit s ist.*

Satz 6.2.4. *Es seien $X \in \mathcal{C}^\alpha$ und $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$. Weiterhin sei $s \in [0,T)$, so dass X im Punkte s rauh ist, und*

$$\limsup_{t \downarrow s} \frac{|Y_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}} < \infty.$$

Dann gilt $Y_s' = 0$.

Beweis. Es sei $w' \in \bar{W}'$ beliebig. Wegen $Y_s' \in L(V, \bar{W})$ gilt $v' \in V'$, wobei

$$v'(v) := w'(Y_s' v), \quad v \in V.$$

Wegen

$$Y_{s,t} = Y_s' X_{s,t} + R_{s,t}^Y, \quad t \in [s,T]$$

folgt

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t \downarrow s} \frac{|v'(X_{s,t})|}{|t-s|^{2\alpha}} = \limsup_{t \downarrow s} \left| w' \left(\frac{Y_s' X_{s,t}}{|t-s|^{2\alpha}} \right) \right| \\
&\leq \limsup_{t \downarrow s} |w'| \frac{|Y_s' X_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}} \leq |w'| \left(\limsup_{t \downarrow s} \frac{Y_{s,t}}{|t-s|^{2\alpha}} + \limsup_{t \downarrow s} \frac{R_{s,t}^Y}{|t-s|^{2\alpha}} \right) < \infty.
\end{aligned}$$

Da X im Punkte s rauh ist, folgt $v' = 0$, und damit $w'(Y_s' v) = 0$ für alle $v \in V$. Da $w' \in \bar{W}'$ beliebig gewesen ist, folgt

$$w'(Y_s' v) = 0 \quad \text{für alle } v \in V \text{ und } w' \in \bar{W}'.$$

Also gilt $Y_s' v = 0$ für alle $v \in V$, und damit $Y_s' = 0$. □

Satz 6.2.5 (Eindeutigkeit der Gubinelli-Ableitung)**.** *Es sei $X \in \mathcal{C}^\alpha$ wahrhaftig rauh, und es seien $(Y, Y'), (Y, \tilde{Y}') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$. Dann gilt $Y' = \tilde{Y}'$.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine dichte Teilmenge $D \subset [0,T]$, so dass X für jedes $s \in D$ rauh zur Zeit s ist. Wir setzen $Z' := Y' - \tilde{Y}'$. Es sei $s \in D$ beliebig. Dann gilt

$$Y_s' X_{s,t} = Y_{s,t} + R_{s,t}^Y = \tilde{Y}_s' X_{s,t}, \quad t \in [s,T],$$

und es folgt

$$Z_s' X_{s,t} = 0, \quad t \in [s,T].$$

Es sei $w' \in \bar{W}'$ beliebig. Wegen $Z_s' \in L(V, \bar{W})$ gilt $v' \in V'$, wobei

$$v'(v) := w'(Z_s' v), \quad v \in V.$$

Es folgt

$$\limsup_{t\downarrow s}\frac{|v'(X_{s,t})|}{|t-s|^{2\alpha}} = \limsup_{t\downarrow s}\left|w'\left(\frac{Z'_s X_{s,t}}{|t-s|^{2\alpha}}\right)\right| = 0.$$

Da X im Punkte s rauh ist, folgt $v' = 0$, und damit $w'(Z'_s v) = 0$ für alle $v \in V$. Da $w' \in \bar{W}'$ beliebig gewesen ist, folgt

$$w'(Z'_s v) = 0 \quad \text{für alle } v \in V \text{ und } w' \in \bar{W}'.$$

Also gilt $Z'_s v = 0$ für alle $v \in V$, und damit $Z'_s = 0$. Da $s \in D$ beliebig gewesen ist, folgt wegen der Stetigkeit von Z', dass $Z' = 0$; das heißt $Y' = \tilde{Y}'$. □

Bemerkung 6.2.6. *Also hängt das Gubinelli-Integral*

$$\int_0^{\cdot} Y_s \, d\mathbf{X}_s$$

tatsächlich nur von $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ *und* $Y \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$ *ab, sofern* X *wahrhaftig rauh ist.*

Satz 6.2.7. *Es sei* $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ *ein rauher Pfad, so dass* X *an einem Punkte* $s \in [0,T)$ *rauh ist, und es sei* $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$*, so dass*

$$\limsup_{t\downarrow s}\frac{|Z_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}} < \infty,$$

wobei

$$Z := \int_0^{\cdot} Y_s \, d\mathbf{X}_s.$$

Dann gilt $Y_s = 0$.

Beweis. Nach dem Satz von Gubinelli (Satz 4.3.9) gilt $(Z, Z') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$, wobei $Z' := Y$. Nun folgt mit Satz 6.2.4, dass $Y_s = 0$. □

Satz 6.2.8. *Es sei* $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$ *ein rauher Pfad, so dass* X *wahrhaftig rauh ist, und es seien* $(Y, Y'), (\tilde{Y}, \tilde{Y}') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], L(V,W))$ *und* $Z, \tilde{Z} \in C([0,T], W)$*, so dass*

$$\int_0^{\cdot} Y_s \, d\mathbf{X}_s + \int_0^{\cdot} Z_s \, ds = \int_0^{\cdot} \tilde{Y}_s \, d\mathbf{X}_s + \int_0^{\cdot} \tilde{Z}_s \, ds.$$

Dann gilt $(Y, Y') = (\tilde{Y}, \tilde{Y}')$ *und* $Z = \tilde{Z}$.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine dichte Teilmenge $D \subset [0,T]$, so dass X für jedes $s \in D$ rauh zur Zeit s ist. Es sei $s \in D$ beliebig. Wegen $\alpha \leq \frac{1}{2}$ existieren Konstanten $C, K > 0$, so dass für alle $t \in [s,T]$ gilt

$$\int_s^t (Y_r - \tilde{Y}_r) d\mathbf{X}_r = \int_s^t (Z_r - \tilde{Z}_r) dr \leq C|t-s| \leq K|t-s|^{2\alpha}.$$

Also folgt mit Satz 6.2.7, dass $Y_s = \tilde{Y}_s$. Da $s \in D$ beliebig gewesen ist, folgt wegen der Stetigkeit von Y und $\tilde{Y}$, dass $Y = \tilde{Y}$. Nach Satz 6.2.5 folgt $Y' = \tilde{Y}'$, das heißt $(Y, Y') = (\tilde{Y}, \tilde{Y}')$. Nun folgt

$$\int_0^{\cdot} Y_s \, d\mathbf{X}_s = \int_0^{\cdot} \tilde{Y}_s \, d\mathbf{X}_s,$$

und daher

$$\int_0^{\cdot} Z_s \, ds = \int_0^{\cdot} \tilde{Z}_s \, ds.$$

Also folgt auch $Z = \tilde{Z}$. □

6.3 Die Brown'sche Bewegung

Es sei $\mathbb{B} = (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ eine stochastische Basis, und es sei B eine $\mathbb{R}^d$-wertige Brown'sche Bewegung.

Lemma 6.3.1 (Gesetz des iterierten Logarithmus für die Brown'sche Bewegung)**.**

(a) Für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ gilt $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{|B_{t,t+h}|}{\sqrt{h \ln \ln(\frac{1}{h})}} = \sqrt{2}.$$

(b) Für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ und jedes $v \in \mathbb{R}^d$ mit $|v| = 1$ gilt $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{|\langle v, B_{t,t+h} \rangle|}{\sqrt{h \ln \ln(\frac{1}{h})}} \geq \sqrt{2}.$$

Satz 6.3.2. *Es sei $\alpha \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ beliebig. Dann ist $B \in \mathcal{C}^\alpha$ wahrhaftig rauh bis auf Ununterscheidbarkeit.*

Beweis. Nach Satz 3.2.6 gilt $\mathbb{P}$-fast sicher $B \in \mathcal{C}^\alpha$. Wir setzen

$$\mathbb{S} := \{v \in \mathbb{R}^d : |v| = 1\}.$$

Wir werden zeigen, dass für alle $s \in \mathbb{R}_+$ und $\theta \in [\frac{1}{2}, 1)$ im $\mathbb{P}$-fast sicheren Sinne gilt

$$\limsup_{t \downarrow s} \frac{\langle v, B_{s,t} \rangle}{|t-s|^\theta} = \infty \quad \text{für alle } v \in \mathbb{S}.$$

Wir definieren die Funktion $\psi : (0, \epsilon) \to (0, \infty)$ durch

$$\psi(h) := \sqrt{h \ln \ln \left(\frac{1}{h} \right)}.$$

Es sei $c := \sqrt{2}$. Nach Lemma 6.3.1 gilt $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\limsup_{t \downarrow s} \frac{|B_{s,t}|}{\psi(t-s)} = c$$

und für jedes $v \in \mathbb{S}$ gilt $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\limsup_{t \downarrow s} \frac{|\langle v, B_{s,t} \rangle|}{\psi(t-s)} \geq c.$$

Es existiert eine dichte, abzählbare Teilmenge $K \subset \mathbb{S}$. Weiterhin existiert eine $\mathbb{P}$-Nullmenge $N \subset \Omega$, so dass für alle $\omega \in N^c$ gilt

$$\begin{aligned} &\limsup_{t \downarrow s} \frac{|B_{s,t}(\omega)|}{\psi(t-s)} = c, \\ &\limsup_{t \downarrow s} \frac{\langle v, B_{s,t}(\omega) \rangle_{\mathbb{R}^d}}{\psi(t-s)} \geq c \quad \text{für alle } v \in K. \end{aligned}$$

Nun seien $\omega \in N^c$ und $v \in \mathbb{S}$ beliebig. Dann existiert eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$, so dass $v_n \to v$. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\langle v_n, B_{s,t}(\omega) \rangle}{\psi(t-s)} \leq \frac{\langle v, B_{s,t}(\omega) \rangle}{\psi(t-s)} + |v_n - v| \frac{|B_{s,t}(\omega)|}{\psi(t-s)}.$$

Es folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$c \leq \limsup_{t \downarrow s} \frac{\langle v_n, B_{s,t}(\omega) \rangle}{\psi(t-s)} \leq \limsup_{t \downarrow s} \frac{\langle v, B_{s,t}(\omega) \rangle}{\psi(t-s)} + \limsup_{t \downarrow s} |v_n - v| \frac{|B_{s,t}(\omega)|}{\psi(t-s)}.$$

Daher, und da

$$\limsup_{t\downarrow s} \frac{|B_{s,t}(\omega)|}{\psi(t-s)} = c,$$

folgt

$$c \leq \limsup_{t\downarrow s} \frac{\langle v, B_{s,t}(\omega)\rangle}{\psi(t-s)}.$$

Also existiert eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \downarrow s$, so dass

$$\frac{|\langle v, B_{s,t_n}(\omega)\rangle|}{\psi(t_n - s)} \geq c - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nun definieren wir $L : (0, \epsilon) \to (0, \infty)$ durch

$$L(h) := \frac{\psi(h)}{\sqrt{h}} = \sqrt{\ln\ln\left(\frac{1}{h}\right)}.$$

Dann gilt $\lim_{h\downarrow 0} L(h) = \infty$, und wegen $\theta \geq \frac{1}{2}$ folgt

$$\begin{aligned}\frac{|\langle v, B_{s,t_n}(\omega)\rangle|}{|t_n - s|^\theta} &= \frac{|\langle v, B_{s,t_n}(\omega)\rangle|}{\psi(t_n - s)} \cdot \frac{\psi(t_n - s)}{|t_n - s|^\theta} \\ &\geq \left(c - \frac{1}{n}\right)|t_n - s|^{\frac{1}{2}-\theta} L(t_n - s) \to \infty\end{aligned}$$

für $n \to \infty$. $\square$

Kapitel 7

Operationen auf rauhen Pfaden

7.1 Zusammenhänge zwischen rauhen Pfaden und regulären rauhen Pfaden

Lemma 7.1.1. *Für jedes $X \in \mathcal{C}^\alpha$ gilt $(X, X') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$, wobei $X' = \mathrm{Id}_V \in L(V)$.*

Beweis. Es gilt $X \in \mathcal{C}^\alpha$ und $X' \in \mathcal{C}^\alpha$. Außerdem gilt

$$R^X_{s,t} = X_{s,t} - X'_s X_{s,t} = 0, \quad s, t \in [0, T].$$

□

Satz 7.1.2. *Es seien $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0, T], V)$, $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0, T], L(\bar{V}, W))$ und $(Z, Z') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0, T], \bar{V})$.*

(a) Das W-wertige rauhe Integral

$$\int_s^t Y_u \, dZ_u := \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{[u,v] \in \Pi} \big(Y_u Z_{u,v} + Y'_u Z'_u \mathbb{X}_{u,v} \big)$$

existiert.

(b) Für alle $s, t \in [0, T]$ gilt

$$\left| \int_s^t Y_r \, dZ_r - Y_s Z_{s,t} - Y'_s Z'_s \mathbb{X}_{s,t} \right| \leq C \big(\|X\|_\alpha \|R^Z\|_{2\alpha} + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} \|Y' Z'\|_\alpha \big) |t - s|^{3\alpha}$$

mit einer Konstanten $C = C(\alpha) > 0$.

Beweis. Folgt aus dem Sewing Lemma (Lemma 4.2.4). Der Beweis verläuft ähnlich wie der des Satzes von Gubinelli (Satz 4.3.9). □

Bemerkung 7.1.3. *In Satz 7.1.2 gilt*

$$\begin{aligned}
&Y_u \in L(\bar{V}, W),\\
&Y'_u \in L(V, L(\bar{V}, W)) \hookrightarrow L(V \otimes \bar{V}, W),\\
&Z_u \in \bar{V},\\
&Z'_u \in L(V, \bar{V}),
\end{aligned}$$

und wir betrachten Z'_u als Operator $Z' \in L(V \otimes V, V \otimes \bar{V})$, wobei wir setzen $Z'(v_1 \otimes v_2) = v_1 \otimes Z'(v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$.

Bemerkung 7.1.4. *Falls $Z = X$ und $Z' = \mathrm{Id}$, dann stimmt rauhe Integral aus Satz 7.1.2 mit dem aus dem Satz von Gubinelli (Satz 4.3.9) überein.*

Satz 7.1.5. *Es sei $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$. Zu jedem $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], W)$ existiert ein $\mathbb{Y} : [0,T]^2 \to W \otimes W$, so dass $\mathbf{Y} = (Y, \mathbb{Y}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], W)$.*

Beweis. Nach Satz 7.1.2 existiert das $W \otimes W$-wertige rauhe Integral

$$\int_s^t Y_r \otimes dY_r := \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{[u,v] \in \Pi} \big(Y_u \otimes Y_{u,v} + (Y'_u \otimes Y'_u)\mathbb{X}_{u,v} \big).$$

Hierbei gilt $Y'_u \in L(V, W)$, und $Y'_u \otimes Y'_u \in L(V \otimes V, W \otimes W)$ ist gegeben durch

$$(Y'_u \otimes Y'_u)(v \otimes \tilde{v}) = Y'_u(v) \otimes Y'_u(\tilde{v}), \quad v, \tilde{v} \in V \otimes V.$$

Wir setzen

$$\mathbb{Y}_{s,t} := \int_s^t Y_{s,r} \otimes dY_r := \int_s^t Y_r \otimes dY_r - Y_s \otimes Y_{s,t}.$$

Dann gilt

$$\mathbb{Y}_{s,t} = \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{[u,v] \in \Pi} \big(Y_{s,u} \otimes Y_{u,v} + (Y'_u \otimes Y'_u)\mathbb{X}_{u,v} \big).$$

Nach Satz 7.1.2 gilt

$$(s,t) \mapsto \mathbb{Y}_{s,t} - (Y'_s \otimes Y'_s)\mathbb{X}_{s,t} \in \mathcal{C}^{3\alpha},$$

und daher $\|\mathbb{Y}\|_{2\alpha} < \infty$. Nun seien $s < r < t$ beliebig. Es sei Π_1 eine Partition von $[s,r]$, und es sei Π_2 eine Partition von $[r,t]$. Dann ist $\Pi := \Pi_1 \cup \Pi_2$ eine Partition von $[s,t]$. Wir setzen

$$\begin{aligned}
\mathbb{Y}^1_{s,t} &:= \sum_{[u,v] \in \Pi} Y_{s,u} \otimes Y_{u,v},\\
\mathbb{Y}^2_{s,t} &:= \sum_{[u,v] \in \Pi} (Y'_u \otimes Y'_u)\mathbb{X}_{u,v}.
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{Y}^1_{s,t} - \mathbb{Y}^1_{s,r} - \mathbb{Y}^1_{r,t} \\
&= \sum_{[u,v]\in\Pi} (Y_{s,u} \otimes Y_{u,v}) - \sum_{[u,v]\in\Pi_1} (Y_{s,u} \otimes Y_{u,v}) - \sum_{[u,v]\in\Pi_2} (Y_{r,u} \otimes Y_{u,v}) \\
&= \sum_{[u,v]\in\Pi_2} ((Y_{s,u} - Y_{r,u}) \otimes Y_{u,v}) = \sum_{[u,v]\in\Pi_2} (Y_{s,r} \otimes Y_{u,v}) = Y_{s,r} \otimes Y_{r,t}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{Y}^2_{s,t} - \mathbb{Y}^2_{s,r} - \mathbb{Y}^2_{r,t} \\
&= \sum_{[u,v]\in\Pi} (Y'_u \otimes Y'_u)\mathbb{X}_{u,v} - \sum_{[u,v]\in\Pi_1} (Y'_u \otimes Y'_u)\mathbb{X}_{u,v} - \sum_{[u,v]\in\Pi_2} (Y'_u \otimes Y'_u)\mathbb{X}_{u,v} = 0.
\end{aligned}
$$

Also gilt die Chen-Gleichung, und damit $(Y, \mathbb{Y}) \in \mathscr{C}^\alpha$. □

Satz 7.1.6. *Für jedes $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$ existiert eine stetige, injektive (nichtlineare) Abbildung*

$$T_{\mathbf{X}} : \big(\mathscr{D}^{2\alpha}_X([0,T], W), \|\!| \cdot |\!\|_{X,2\alpha}\big) \hookrightarrow \big(\mathscr{C}^\alpha([0,T], W), \varrho_\alpha\big).$$

Beweis. Zur Erinnerung:

$$
\begin{aligned}
\|(Y, Y')\|_{X,2\alpha} &= \|Y'\|_\alpha + \|R^Y\|_{2\alpha}, \\
|\!\|(Y, Y')|\!\|_{X,2\alpha} &= |Y_0| + |Y'_0| + \|(Y, Y')\|_{X,2\alpha}.
\end{aligned}
$$

Wir berechnen $\|Y\|_\alpha + \|\mathbb{Y}\|_{2\alpha}$. Es gilt

$$|\mathbb{Y}_{s,t}| \le |(Y'_s \otimes Y'_s)\mathbb{X}_{s,t}| + C\big(\|Y\|_\alpha \|R^Y\|_{2\alpha} + \|(Y'_s \otimes Y'_s)\mathbb{X}_{s,t}\|_{2\alpha}\|Y'\|_\alpha\big)|t-s|^{3\alpha}$$

Ausserdem gilt

$$\|Y'\|_\infty \le C \; |\!\| \; (Y, Y') \; |\!\|_{X,2\alpha} \; .$$

Nun benutzen wir Lemma 4.3.4 zur Abschaetzung von $\|Y\|_\alpha$. □

Bemerkung 7.1.7.

(a) *Das rauhe Integral $\int_0^\cdot \tilde{Z}_s d\mathbf{Y}_s$ gemäß des Satzes von Gubinelli (Satz 4.3.9) existiert für $\mathbf{Y} = (Y, \mathbb{Y}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], W)$ und $(\tilde{Z}, \tilde{Z}') \in \mathscr{D}^{2\alpha}_Y([0,T], L(W, \bar{W}))$. In diesem Fall ist das Integral $\bar{W}$-wertig, und es gilt $\tilde{Z} \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], L(W, \bar{W}))$ und $\tilde{Z}' \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], L(W, L(W, \bar{W})))$, wobei $L(W, L(W, \bar{W})) \hookrightarrow L(W \otimes W, \bar{W})$. Das Integral ist gegeben durch*

$$\int_0^t \tilde{Z}_s d\mathbf{Y}_s = \lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\Pi} \big(\tilde{Z}_u Y_{u,v} + \tilde{Z}'_u \mathbb{Y}_{u,v}\big).$$

(b) *Das rauhe Integral $\int_0^{\cdot} Z_s dY_s$ gemäß Satz 7.1.2 existiert für $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$, $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], W)$ und $(Z, Z') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], L(W, \bar{W}))$. In diesem Fall ist das Integral $\bar{W}$-wertig, und es gilt $Y \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], W)$, $Y' \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], L(V, W))$, wobei $L(V, W) \hookrightarrow L(V \otimes V, V \otimes W)$, und $Z \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], L(W, \bar{W}))$, $Z' \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], L(V, L(W, \bar{W})))$, wobei $L(V, L(W, \bar{W})) \hookrightarrow L(V \otimes W, \bar{W})$. Das Integral ist gegeben durch*

$$\int_0^t Z_s dY_s = \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{[u,v] \in \Pi} \big(Z_u Y_{u,v} + Z_u' Y_u' \mathbb{X}_{u,v} \big).$$

Satz 7.1.8. *Es seien $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$, $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], W)$ und $\mathbf{Y} = (Y, \mathbb{Y}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], W)$ gemäß Satz 7.1.5. Weiterhin sei $(\tilde{Z}, \tilde{Z}') \in \mathscr{D}_Y^{2\alpha}([0,T], L(W, \bar{W}))$. Wir setzen $Z := \tilde{Z}$ und $Z' := \tilde{Z}' Y'$.*

(a) *Es gilt $(Z, Z') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], L(W, \bar{W}))$.*

(b) *Es gilt*

$$\int_0^{\cdot} Z_s dY_s = \int_0^{\cdot} \tilde{Z}_s d\mathbf{Y}_s.$$

Hierbei bezeichnet $\int_0^{\cdot} Z_s dY_s$ das rauhe Integral gemäß Satz 7.1.2, und $\int_0^{\cdot} \tilde{Z}_s d\mathbf{Y}_s$ das $\bar{W}$-wertige rauhe Integral gemäß des Satzes von Gubinelli (Satz 4.3.9).

Beweis.

(a) Es gilt $\|Z\|_\alpha = \|\tilde{Z}\|_\alpha < \infty$ und $\|Z'\|_\alpha \leq \|\tilde{Z}'\|_\alpha \|Y'\|_\infty < \infty$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} R_{s,t}^Y &= Y_{s,t} - Y_s' X_{s,t}, \\ R_{s,t}^{\tilde{Z}} &= \tilde{Z}_{s,t} - \tilde{Z}_s' Y_{s,t}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} R_{s,t}^Z &= Z_{s,t} - Z_s' X_{s,t} = \tilde{Z}_{s,t} - \tilde{Z}_s' Y_s' X_{s,t} \\ &= (\tilde{Z}_{s,t} - \tilde{Z}_s' Y_{s,t}) + \tilde{Z}_s' (Y_{s,t} - Y_s' X_{s,t}) = R_{s,t}^{\tilde{Z}} + \tilde{Z}_s' R_{s,t}^Y. \end{aligned}$$

Es folgt $\|R^Z\|_{2\alpha} < \infty$, und damit $(Z, Z') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$.

(b) Es gilt

$$\int_0^t \tilde{Z}_s d\mathbf{Y}_s = \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{[u,v] \in \Pi} \big(\tilde{Z}_u Y_{u,v} + \tilde{Z}_u' \mathbb{Y}_{u,v} \big)$$

und

$$\int_0^t Z_s dY_s = \lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\Pi} \big(Z_u Y_{u,v} + Z'_u Y'_u \mathbb{X}_{u,v}\big)$$
$$= \lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\Pi} \big(\tilde{Z}_u Y_{u,v} + \tilde{Z}'_u Y'_u Y'_u \mathbb{X}_{u,v}\big).$$

Nach Satz 7.1.2 gilt

$$(s,t) \mapsto \mathbb{Y}_{s,t} - (Y'_s \otimes Y'_s)\mathbb{X}_{s,t} \in \mathcal{C}^{3\alpha}.$$

Hierbei beachten wir, dass

$$Y'_s Y'_s \mathbb{X}_{s,t} = (Y'_s \otimes Y'_s)\mathbb{X}_{s,t}$$

Es folgt

$$\Big| \sum_{[u,v]\in\Pi} \big(\tilde{Z}'_u \mathbb{Y}_{u,v} - \tilde{Z}'_u Y'_u Y'_u \mathbb{X}_{u,v}\big) \Big| \leq \|\tilde{Z}'\|_\infty C \sum_{[u,v]\in\Pi} |v-u|^{3\alpha}$$
$$\leq \|\tilde{Z}'\|_\infty C |\Pi|^{3\alpha-1} \underbrace{\sum_{[u,v]\in\Pi} |v-u|}_{=T} \to 0 \quad \text{für } |\Pi| \to 0,$$

da $3\alpha > 1$.

□

Bemerkung 7.1.9. *Es seien* $\frac{1}{3} < \beta \leq \alpha$.

(a) Es gilt $\mathscr{C}^\alpha \hookrightarrow \mathscr{C}^\beta$.

(b) Für jedes $X \in \mathscr{C}^\alpha$ *gilt* $\mathscr{D}_X^{2\alpha} \hookrightarrow \mathscr{D}_X^{2\beta}$.

Beweis.

(a) Aus $\|X\|_\alpha, \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} < \infty$ folgt $\|X\|_\beta, \|\mathbb{X}\|_{2\beta} < \infty$.

(b) Aus $\|Y\|_\alpha, \|Y'\|_\alpha, \|R^Y\|_{2\alpha} < \infty$ folgt $\|Y\|_\beta, \|Y'\|_\beta, \|R^Y\|_{2\beta} < \infty$.

□

Lemma 7.1.10. *Die Abbildung* $\iota : \mathcal{C}^{2\alpha} \hookrightarrow \mathscr{D}_X^{2\alpha}$ *gegeben durch* $\iota Y = (Y, 0)$ *ist eine lineare isometrische Einbettung.*

Beweis. Es gilt $Y \in \mathcal{C}^{2\alpha} \subset \mathcal{C}^\alpha$ und $0 \in \mathcal{C}^\alpha$. Außerdem gilt $R^Y = Y \in \mathcal{C}^{2\alpha}$. Also gilt $(Y,0) \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$. Die Abbildung ι ist linear. Außerdem ist sie eine Isometrie, da

$$|||\iota Y|||_{X,2\alpha} = |||(Y,0)|||_{X,2\alpha} = |Y_0| + \|(Y,0)\|_{X,2\alpha}$$
$$= |Y_0| + \|R^Y\|_{2\alpha} = |Y_0| + \|Y\|_{2\alpha} = |||Y|||_{2\alpha}\,.$$

□

7.2 Verknüpfung mit glatten Funktionen

Satz 7.2.1. *Es seien* $X \in \mathcal{C}^\alpha([0,T],V)$, $(Y,Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],W)$ *und* $\varphi \in C_b^2(W,\bar{W})$. *Wir definieren* $\varphi(Y)' := D\varphi(Y)Y'$.

(a) Es gilt $(\varphi(Y),\varphi(Y)') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],\bar{W})$.

(b) Für eine weitere Funktion $\psi \in C_b^2(\bar{W},\tilde{W})$ *gilt*

$$\big((\psi \circ \varphi)(Y),(\psi \circ \varphi)(Y)'\big) = \big(\psi(\varphi(Y)),\psi(\varphi(Y))'\big).$$

Beweis.

(a) Es gilt

$$|\varphi(Y_t) - \varphi(Y_s)| \leq \|D\varphi\|_\infty |Y_t - Y_s| \leq \|D\varphi\|_\infty \|Y\|_\alpha |t-s|^\alpha,$$

und daher $Y \in \mathcal{C}^\alpha$, und es gilt

$$\begin{aligned} |\varphi(Y_t)' - \varphi(Y_s)'| &= |D\varphi(Y_t)Y_t' - D\varphi(Y_s)Y_s'| \\ &\leq |D\varphi(Y_t)(Y_t' - Y_s')| + |(D\varphi(Y_t) - D\varphi(Y_s))Y_s'| \\ &\leq \|D\varphi\|_\infty |Y_t' - Y_s'| + \|Y'\|_\infty |D\varphi(Y_t) - D\varphi(Y_s)| \\ &\leq \big(\|D\varphi\|_\infty \|Y'\|_\alpha + \|Y'\|_\infty \|D^2\varphi\|_\infty \|Y\|_\alpha\big)|t-s|^\alpha, \end{aligned}$$

und daher $Y \in \mathcal{C}^\alpha$. Weiterhin gilt mit dem Satz von Taylor

$$\begin{aligned} |R_{s,t}^Y| &= |\varphi(Y_{s,t}) - D\varphi(Y_s)Y_s'X_{s,t}| \\ &\leq |\varphi(Y_t - Y_s) - D\varphi(Y_s)(Y_t - Y_s)| + |D\varphi(Y_s)\underbrace{(Y_{s,t} - Y_s'X_{s,t})}_{=R_{s,t}^Y}| \\ &\leq \frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty |Y_t - Y_s|^2 + \|D\varphi\|_\infty |R_{s,t}^Y| \\ &\leq \frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty \|Y\|_\alpha^2 |t-s|^{2\alpha} + \|D\varphi\|_\infty \|R^Y\|_{2\alpha} |t-s|^{2\alpha}, \end{aligned}$$

und daher $\|R^Y\|_{2\alpha} < \infty$. Insgesamt folgt $(\varphi(Y),\varphi(Y)') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$.

(b) Nach der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)(Y)' &= D(\psi \circ \varphi)(Y)Y' = D\psi(\varphi(Y))D\varphi(Y)Y' \\ &= D\psi(\varphi(Y))\varphi(Y)' = \psi(\varphi(Y))'. \end{aligned}$$

□

Korollar 7.2.2 (Leibnizregel). *Es sei* $X \in \mathcal{C}^\alpha([0,T],V)$*. Weiterhin seien* $(Y,Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],W)$ *und* $(Z,Z') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],\bar{W})$*. Weiterhin seien* $f \in C_b^2(V,W)$*,* $g \in C_b^2(V,\bar{W})$ *und* $B \in L^{(2)}(W \times \bar{W},\bar{V})$*. Dann gilt* $(U,U') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],\bar{V})$*, wobei* $U = B(f(Y),g(Z))$ *und* $U' = B(f(Y)',g(Z)) + B(f(Y),g(Z)')$*.*

Beweis. Es gilt $((Y,Z),(Y',Z')) \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],W \times \bar{W})$. Also folgt die Leibnizregel aus Satz 2.2.7 und Satz 7.2.1. □

Lemma 7.2.3. *Es seien* $X \in \mathcal{C}^\alpha([0,T],V)$*,* $(Y,Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],W)$ *und* $\varphi \in C_b^2(W,\bar{W})$*. Es sei* $M \geq 1$ *eine Konstante, so dass*

$$\|(Y,Y')\|_{X,2\alpha} \leq M.$$

Dann existiert eine Konstante $C = C(T,\alpha) > 0$*, die gleichmäßig bezüglich* $T \leq 1$ *gewählt werden kann, so dass*

$$\|(\varphi(Y),\varphi(Y)')\|_{X,2\alpha} \leq CM\|\varphi\|_{\mathcal{C}_b^2}(1+\|X\|_\alpha)^2\Big(|Y_0'| + \|(Y,Y')\|_{X,2\alpha}\Big).$$

Beweis. Zur Erinnerung:

$$\|(Y,Y')\|_{X,2\alpha} = \|Y'\|_\alpha + \|R^Y\|_{2\alpha}.$$

Wir haben bereits gesehen, dass

$$\begin{aligned}
\|\varphi(Y)'\|_\alpha &\leq \|D\varphi(Y)\|_\infty \|Y'\|_\alpha + \|Y'\|_\infty \|D^2\varphi(Y)\|_\infty \|Y\|_\alpha, \\
\|R^{\varphi(Y)}\|_{2\alpha} &\leq \frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty \|Y\|_\alpha^2 + \|D\varphi\|_\infty \|R^Y\|_{2\alpha}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\|(\varphi(Y),\varphi(Y)')\|_{X,2\alpha} &= \|\varphi(Y)'\|_\alpha + \|R^{\varphi(Y)}\|_{2\alpha} \\
&\leq \|D\varphi(Y)\|_\infty \|Y'\|_\alpha + \|Y'\|_\infty \|D^2\varphi(Y)\|_\infty \|Y\|_\alpha \\
&\quad + \frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty \|Y\|_\alpha^2 + \|D\varphi\|_\infty \|R^Y\|_{2\alpha}.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\|Y'\|_\infty \leq C(|Y_0'| + \|Y'\|_\alpha),$$

und nach Lemma 4.3.4 gilt

$$\|Y\|_\alpha \leq C(1+\|X\|_\alpha)(|Y_0'| + \|(Y,Y')\|_{X,2\alpha}).$$

□

7.3 Stabilität von Verknüpfungen

Satz 7.3.1. *Es seien* $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}), \tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}, \tilde{\mathbb{X}}) \in \mathscr{C}^\alpha$, $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$ *und* $(\tilde{Y}, \tilde{Y}') \in \mathscr{D}_{\tilde{X}}^{2\alpha}$. *Wir setzen*

$$\begin{aligned}(Z, Z') &:= (\varphi(Y), \varphi(Y)') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha},\\ (\tilde{Z}, \tilde{Z}') &:= (\varphi(\tilde{Y}), \varphi(\tilde{Y})') \in \mathscr{D}_{\tilde{X}}^{2\alpha}.\end{aligned}$$

Es sei $M \geq 1$ *eine Konstante, so dass*

$$\begin{aligned}\|\|(Y, Y')\|\|_{X,2\alpha} &\leq M,\\ \|\|(\tilde{Y}, \tilde{Y}')\|\|_{\tilde{X},2\alpha} &\leq M.\end{aligned}$$

Dann gilt die lokale Lipschitz-Abschätzung

$$\begin{aligned}d_{X,\tilde{X},2\alpha}((Z, Z'), (\tilde{Z}, \tilde{Z}')) \leq C_M \Big(&\varrho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) + |Y_0 - \tilde{Y}_0| + |Y_0' - \tilde{Y}_0'|\\ &+ d_{X,\tilde{X},2\alpha}((Y, Y'), (\tilde{Y}, \tilde{Y}'))\Big)\end{aligned}$$

und

$$\|Z - \tilde{Z}\|_\alpha \leq C_M \Big(\varrho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) + |Y_0 - \tilde{Y}_0| + |Y_0' - \tilde{Y}_0'| + d_{X,\tilde{X},2\alpha}((Y, Y'), (\tilde{Y}, \tilde{Y}'))\Big)$$

mit einer Konstanten $C_M = C(M, T, \alpha, \varphi) > 0$.

7.4 Eine weitere Version der Itô-Formel

Lemma 7.4.1. *Es sei* $\Delta : [0, T]^2 \to V$, *so dass* $\|\Delta\|_\beta < \infty$ *für ein* $\beta > 1$. *Dann gilt*

$$\lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{[u,v] \in \Pi} \Delta_{u,v} = 0.$$

Beweis. Es gilt

$$\Big| \sum_{[u,v] \in \Pi} \Delta_{u,v} \Big| \leq C \sum_{[u,v] \in \Pi} |v - u|^\beta \leq C |\Pi|^{\beta - 1} \underbrace{\sum_{[u,v] \in \Pi} |v - u|}_{=T} \to 0$$

für $|\Pi| \to 0$. $\square$

Satz 7.4.2. *Es seien* $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$, $(Y,Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],V)$, $(Y',Y'') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],L(V))$, $\Gamma \in \mathcal{C}^{2\alpha}([0,T],V)$, *so dass* $Y \in \mathcal{C}^\alpha([0,T],V)$ *gegeben ist durch*

$$Y = \int_0^\cdot Y'_s d\mathbf{X}_s + \Gamma.$$

Weiterhin sei $F \in C_b^3(V,W)$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned} F(Y_t) = F(Y_0) &+ \int_0^t DF(Y_s)Y'_s d\mathbf{X}_s + \int_0^t DF(Y_s) d\Gamma_s, \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t D^2F(Y_s)(Y'_s, Y'_s) d[\bar{\mathbf{X}}]_s, \quad t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Hierbei ist das 1. Integral ein wohldefiniertes Gubinelli-Integral, und die beiden anderen Integrale sind wohldefinierte Young-Integrale.

Beweis. Nach Satz 7.2.1 gilt $(F(Y), F(Y)') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],W)$, wobei

$$F(Y)' = DF(Y)Y'.$$

Außerdem gilt $(F(Y)', F(Y)'') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],L(W))$, wobei

$$F(Y)'' = D^2F(Y)(Y',Y') + DF(Y)Y''.$$

Folglich existiert das Gubinelli-Integral

$$\int_0^\cdot DF(Y_s)Y'_s d\mathbf{X}_s.$$

Die beiden Young-Integrale existieren nach Satz 4.1.1, da $DF(Y) \in \mathcal{C}^\alpha$, $\Gamma \in \mathcal{C}^{2\alpha}$ und $D^2F(Y)(Y',Y') \in \mathcal{C}^\alpha$, $[\bar{\mathbf{X}}] \in \mathcal{C}^{2\alpha}$.

Nach dem Satz von Gubinelli (Satz 4.3.9) gilt

$$Y_{u,v} = Y'_u X_{u,v} + Y''_u \mathbb{X}_{u,v} + \Gamma_{u,v} + \Delta_{u,v}$$

mit einer Funktion $\Delta : [0,T]^2 \to V$, so dass $\|\Delta\|_{3\alpha} < \infty$. Nach Satz 7.1.5 existiert ein $\mathbb{Y} : [0,T] \to V \otimes V$, so dass $\mathbf{Y} = (Y, \mathbb{Y}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$. Nach Korollar 5.3.15 gilt

$$\begin{aligned} F(Y_t) &= F(Y_0) + \int_0^t DF(Y_s) d\mathbf{Y}_s + \frac{1}{2}\int_0^t D^2F(Y_s) d[\bar{\mathbf{Y}}]_s \\ &= \lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\Pi} \big(DF(Y_u)Y_{u,v} + D^2F(Y_u)\mathbb{Y}_{u,v}\big) \\ &\quad + \frac{1}{2} \lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\Pi} D^2F(Y_u)[\bar{\mathbf{Y}}]_{u,v}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$(u,v) \mapsto \mathbb{Y}_{u,v} - Y'_u Y'_u \mathbb{X}_{u,v} \in \mathcal{C}^{3\alpha}.$$

Weiterhin

$$\begin{aligned}
[\bar{\mathbf{Y}}]_{u,v} &= Y_{u,v} \otimes Y_{u,v} - 2\,\mathrm{Sym}(\mathbb{Y}_{u,v}) \\
&= (Y'_u X_{u,v} + Y''_u \mathbb{X}_{u,v} + \Gamma_{u,v} + \Delta_{u,v}) \otimes (Y'_u X_{u,v} + Y''_u \mathbb{X}_{u,v} + \Gamma_{u,v} + \Delta_{u,v}) - 2\,\mathrm{Sym}(\mathbb{Y}_{u,v}) \\
&= Y'_u Y'_u (X_{u,v} \otimes X_{u,v} - 2\,\mathrm{Sym}(\mathbb{X}_{u,v})) + Z_{u,v} \\
&= Y'_u Y'_u [\bar{\mathbf{X}}]_{u,v} + Z_{u,v}
\end{aligned}$$

mit einer Funktion $Z : [0,T]^2 \to V$, so dass $\|Z\|_{3\alpha} < \infty$. Nun folgt mit Lemma 7.4.1

$$\begin{aligned}
F(Y_t) &= F(Y_0) + \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{[u,v] \in \Pi} \big(DF(Y_u)(Y_{u,v} - Y''_u \mathbb{X}_{u,v}) + DF(Y_u) Y''_u \mathbb{X}_{u,v} + D^2F(Y_u) Y'_u Y'_u \mathbb{X}_{u,v} \big) \\
&\quad + \frac{1}{2} \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{[u,v] \in \Pi} D^2F(Y_u) Y'_u Y'_u [\bar{\mathbf{X}}]_{u,v} \\
&= \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{[u,v] \in \Pi} \Big(DF(Y_u) Y'_u X_{u,v} + \big(DF(Y_u) Y''_u + D^2F(Y_u) Y'_u Y'_u \big) \mathbb{X}_{u,v} \Big) \\
&\quad + \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{[u,v] \in \Pi} DF(Y_u) \Gamma_{u,v} + \frac{1}{2} \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{[u,v] \in \Pi} D^2F(Y_u)(Y'_u, Y'_u)[\bar{\mathbf{X}}]_{u,v}.
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
F(Y_t) = F(Y_0) &+ \int_0^t DF(Y_s) Y'_s d\mathbf{X}_s + \int_0^t DF(Y_s) d\Gamma_s, \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t D^2F(Y_s)(Y'_s, Y'_s) d[\bar{\mathbf{X}}]_s, \quad t \in [0,T].
\end{aligned}$$

□

Kapitel 8

Rauhe Differentialgleichungen

8.1 Young-Differentialgleichungen

Es sei $X \in \mathcal{C}^\beta([0,1],V)$ für ein $\beta \in (\frac{1}{2},1]$, und es sei $f \in C_b^1(W, L(V,W))$. Wir betrachten die Young-Differentialgleichung

$$\begin{cases} dY_t &= f(Y_t)dX_t \\ Y_0 &= \xi. \end{cases}$$

Definition 8.1.1. *Es sei $\xi \in W$ beliebig. Ein Pfad $Y \in \mathcal{C}^\alpha([0,1],W)$ mit $\alpha > 0$, so dass $\alpha + \beta > 1$, heißt eine Lösung der Young-Differentialgleichung mit $Y_0 = \xi$, falls*

$$Y_t = \xi + \int_0^t f(Y_s)dX_s, \quad t \in [0,1].$$

Bemerkung 8.1.2. *Es gilt $f(Y) \in \mathcal{C}^\alpha([0,1], L(V,W))$, denn*

$$|f(Y_t) - f(Y_s)| \leq \|Df\|_\infty |Y_t - Y_s| \leq \|Df\|_\infty \|Y\|_\alpha |t-s|^\alpha.$$

Lemma 8.1.3. *Es sei $Y \in \mathcal{C}^\alpha([0,1], L(V,W))$ mit $\alpha > 0$, so dass $\alpha + \beta > 1$. Dann gilt $\int_0^\cdot Y_s\, dX_s \in \mathcal{C}^\alpha([0,1],W)$ mit*

$$\left\| \int_0^\cdot Y_s\, dX_s \right\|_{\beta;[0,T]} \leq C\big(|Y_0| + \|Y\|_{\alpha;[0,T]}\big)\|X\|_{\beta;[0,T]}, \quad T \in (0,1]$$

mit einer Konstanten $C = C(\alpha,\beta) > 0$.

Beweis. Siehe Blatt 6, Aufgabe 1(c). □

Lemma 8.1.4. *Es seien $f \in C_b^2(W,\bar{W})$ und $T \leq 1$. Weiterhin sei $K \geq 1$ gegeben. Dann existiert eine Konstante $C = C_{\alpha,K} > 0$, so dass für alle $X, Y \in \mathcal{C}^\alpha$ mit $\|X\|_{\alpha;[0,T]}, \|Y\|_{\alpha;[0,T]} \leq K$ gilt*

$$\|f(X) - f(Y)\|_{\alpha;[0,T]} \leq C\|f\|_{C_b^2}\Big(|X_0 - Y_0| + \|X - Y\|_{\alpha;[0,T]}\Big).$$

Beweis. Wir definieren $g : W \times W \to L(W, \bar{W})$ durch

$$g(x, y) := \int_0^1 Df(tx + (1-t)y)\, dt.$$

Dann gilt $\|g\|_\infty \leq \|Df\|_\infty$. Auf $W \times W$ betrachten wir die Norm

$$|(x, y)|_{W \times W} = |x| + |y|.$$

Es sei $t \in [0, 1]$ beliebig. Der bilineare Operator $B_t : W \times W \to W$,

$$B_t(x, y) := tx + (1-t)y$$

ist stetig, denn

$$|B_t(x, y)| = |tx + (1-t)y| \leq t|x| + (1-t)|y| \leq |x| + |y| = |(x, y)|$$

Es gilt

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \int_0^1 Df(B_t(x, y))dt, \\ Dg(x, y) &= \int_0^1 D^2 f(B_t(x, y)) DB_t(x, y)dt. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\|Dg\|_\infty \leq \|D^2 f\|_\infty.$$

Es folgt

$$|g(x, y) - g(\tilde{x}, \tilde{y})| \leq \|D^2 f\|_\infty (|x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}|).$$

Nach dem Satz von Taylor (Satz 1.1.47 mit $n = 1$) gilt

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(Y_t) &= f(Y_t + (X_t - Y_t)) - f(Y_t) \\ &= \int_0^1 Df(Y_t + v(X_t - Y_t))(X_t - Y_t)dv \\ &= \int_0^1 Df(vX_t + (1-v)Y_t)dv\, (X_t - Y_t). \end{aligned}$$

Mit $\Delta_t = X_t - Y_t$ folgt

$$\begin{aligned} &f(X)_{s,t} - f(Y)_{s,t} = (f(X_t) - f(X_s)) - (f(Y_t) - f(Y_s)) \\ &= (f(X_t) - f(Y_t)) - (f(X_s) - f(Y_s)) \\ &= \int_0^1 Df(vX_t + (1-v)Y_t)dv\, (X_t - Y_t) - \int_0^1 Df(vX_s + (1-v)Y_s)dv\, (X_s - Y_s) \\ &= g(X_t, Y_t)(X_t - Y_t) - g(X_s, Y_s)(X_s - Y_s) = g(X_t, Y_t)\Delta_t - g(X_s, Y_s)\Delta_s, \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
|f(X)_{s,t} - f(Y)_{s,t}| &= |g(X_t, Y_t)\Delta_t - g(X_s, Y_s)\Delta_s| \\
&= |g(X_t, Y_t)(\Delta_t - \Delta_s) + (g(X_t, Y_t) - g(X_s, Y_s))\Delta_s| \\
&\le \|Df\|_\infty |X_{s,t} - Y_{s,t}| + \|D^2 f\|_\infty (|X_{s,t}| + |Y_{s,t}|)|X_s - Y_s| \\
&\le \big(\|Df\|_\infty \|X - Y\|_\alpha + 2K\|D^2 f\|_\infty \|X - Y\|_{\infty;[0,T]}\big)|t - s|^\alpha.
\end{aligned}$$

Wegen $T \le 1$ gilt

$$\|X - Y\|_{\infty;[0,T]} \le |X_0 - Y_0| + \|X - Y\|_{\alpha;[0,T]},$$

und die behauptete Abschätzung folgt. □

Satz 8.1.5. *Es sei $X \in \mathcal{C}^\beta([0,1], V)$ für ein $\beta \in (\frac{1}{2}, 1]$, und es sei $f \in C_b^2(W, L(V, W))$. Dann existiert zu jedem $\xi \in W$ und jedem $\alpha \in (\frac{1}{2}, \beta)$ eine eindeutig bestimmte Lösung $Y \in \mathcal{C}^\alpha([0,1], W)$ der Young-Differentialgleichung mit $Y_0 = \xi$.*

Beweis. Für $T \in (0, 1]$ und definieren wir

$$\Phi_T : \mathcal{C}^\alpha([0,T], W) \to \mathcal{C}^\beta([0,T], W) \subset \mathcal{C}^\alpha([0,T], W)$$

durch

$$\Phi_T(Y) := \xi + \int_0^\cdot f(Y_s) dX_s.$$

Hierbei haben wir die Struktur

$$\Phi_T : \mathcal{C}^\alpha([0,T], W) \xrightarrow{f} \mathcal{C}^\alpha([0,T], L(V, W)) \xrightarrow{\xi + \int} \mathcal{C}^\beta([0,T], W).$$

Wegen $\beta \in (\frac{1}{2}, 1]$ und $\alpha \in (\frac{1}{2}, \beta)$ gilt außerdem $\alpha + \beta > 1$, so dass die Young-Integrale wohldefiniert sind. Wir definieren den affinen Unterraum

$$E := \{Y \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], W) : Y_0 = \xi\}$$

und die Kugel

$$\mathbb{B} := \{Y \in E : \|Y\|_\alpha \le 1\}.$$

Dann ist $(\mathbb{B}, d)$ versehen mit der Metrik $d(Y, \tilde{Y}) = \|Y - \tilde{Y}\|_\alpha$ ein vollständiger metrischer Raum. Für die folgenden Rechnungen beachten wir, dass

$$X \in \mathcal{C}^\beta([0,1], V) \subset \mathcal{C}^\alpha([0,1], V) \quad \text{und} \quad \|X\|_\alpha \le \|X\|_\beta T^{\beta - \alpha}.$$

Nach Lemma 8.1.3 gilt für alle $Y \in \mathbb{B}$

$$\begin{aligned} \|\Phi_T(Y)\|_\alpha &\leq C_1(|f(Y_0)| + \|f(Y)\|_\alpha)\|X\|_\alpha \\ &\leq C_1(|f(\xi)| + \|Df\|_\infty\|Y\|)\|X\|_\alpha \\ &\leq C_1(\|f\|_\infty + \|Df\|_\infty)\|X\|_\alpha \leq C_1\|f\|_{C_b^1}\|X\|_\beta T^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

mit $C_1 = C_1(\alpha, \beta)$. Weiterhin gilt für alle $Y, \tilde{Y} \in \mathbb{B}$ nach Lemma 8.1.3 und Lemma 8.1.4 mit $K = 1$

$$\begin{aligned} d(\Phi_T(Y), \Phi_T(\tilde{Y})) = \|\Phi_T(Y) - \Phi_T(\tilde{Y})\|_\alpha &= \left\| \int_0^\cdot \big(f(Y_s) - f(\tilde{Y}_s)\big) dX_s \right\|_\alpha \\ &\leq C_2\big(|f(Y_0) - f(\tilde{Y}_0)| + \|f(Y) - f(\tilde{Y})\|_\alpha\big)\|X\|_\alpha \\ &\leq C_2\big(|f(Y_0) - f(\tilde{Y}_0)| + C_3\|f\|_{C_b^2}(|Y_0 - \tilde{Y}_0| + \|Y - \tilde{Y}\|_\alpha)\big)\|X\|_\alpha \\ &= C_2 C_3\|f\|_{C_b^2}\|Y - \tilde{Y}\|_\alpha\|X\|_\alpha \\ &\leq C_2 C_3\|f\|_{C_b^2}\|X\|_\beta T^{\beta-\alpha}\|Y - \tilde{Y}\|_\alpha \end{aligned}$$

mit $C_2 = C_2(\alpha, \beta)$ und $C_3 = C_3(\alpha, \beta)$. Wir setzen $C := \max\{C_1, C_2 C_3\}$. Dann gilt für

$$T_0 := T_0(f, \alpha, \beta, X) = \left(\frac{1}{2C\|f\|_{C_b^2}\|X\|_\beta} \right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}},$$

dass $\Phi_{T_0} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ eine Kontraktion ist. Nun benutzen wir den Banach'schen Fixpunktsatz. □

8.2 Rauhe Differentialgleichungen

Es sei $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,1], V)$ ein rauher Pfad für ein $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, und es sei $f \in C_b^2(W, L(V, W))$. Wir betrachten die rauhe Differentialgleichung

$$\begin{cases} dY_t &= f(Y_t) d\mathbf{X}_t \\ Y_0 &= \xi. \end{cases}$$

Definition 8.2.1. *Es sei $\xi \in W$ beliebig. Ein Pfad $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,1], W)$ heißt eine <u>Lösung</u> der rauhen Differentialgleichung mit $Y_0 = \xi$, falls*

$$Y_t = \xi + \int_0^t f(Y_s) d\mathbf{X}_s, \quad t \in [0,1],$$

wobei das Integral im Sinne des Satzes von Gubinelli (Satz 4.3.9) gemeint ist.

Bemerkung 8.2.2. *Nach Satz 7.2.1 gilt* $(f(Y), f(Y)') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,1], L(V,W))$.

Lemma 8.2.3. *Es seien* $X \in C^\alpha([0,T], V)$ *und* $G \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], L(W, \bar{W}))$, $H \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], W)$.

(a) *Es gilt* $(GH, (GH)') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], \bar{W})$, *wobei*

$$(GH)' = G'H + GH'.$$

(b) *Es existiert eine Konstante* $C > 0$, *so dass*

$$\begin{aligned}\|(GH,(GH)')\|_{X,2\alpha} \leq C\Big(|G_0| + |G_0'| + \|(G,G')\|_{X,2\alpha}\Big)& \\ \times\Big(|H_0| + |H_0'| + \|(H,H')\|_{X,2\alpha}\Big)&.\end{aligned}$$

Satz 8.2.4. *Es sei* $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\beta([0,1], V)$ *für ein* $\beta \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, *und es sei* $f \in C_b^3(W, L(V,W))$. *Dann existiert zu jedem* $\xi \in W$ *eine eindeutig bestimmte Lösung* $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\beta}([0,1], W)$ *der rauhen Differentialgleichung mit* $Y_0 = \xi$.

Beweis. Wir wählen ein $\alpha \in (\frac{1}{3}, \beta)$ mit $\beta \leq \frac{3}{2}\alpha$. Dann gilt $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^\beta \subset \mathscr{C}^\alpha$. Für $T \in (0,1]$ definieren wir $\Phi_T : \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], W) \to \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], W)$ durch

$$\Phi_T(Y, Y') := \bigg(\xi + \int_0^\cdot f(Y_s)d\mathbf{X}_s, f(Y)\bigg).$$

Hierbei haben wir die Struktur

$$\Phi_T : \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], W) \xrightarrow{f} \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], L(V,W)) \xrightarrow{(\xi + \int_\cdot \cdot)} \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], W).$$

Wir definieren den affinen Unterraum

$$E := \{(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], W) : (Y_0, Y_0') = (\xi, f(\xi))\}$$

und die Kugel

$$\mathbb{B} = \{(Y, Y') \in E : \|(Y, Y')\|_{X,2\alpha} \leq 1\}.$$

Dann ist $(\mathbb{B}, d)$ versehen mit der Metrik

$$d\big((Y, Y'), (\tilde{Y}, \tilde{Y}')\big) = \|(Y, Y') - (\tilde{Y}, \tilde{Y}')\|_{X,2\alpha}$$

ein vollständiger metrischer Raum. Wir setzen $M := 1 + \|f\|_\infty$. Es sei $(Y, Y') \in \mathbb{B}$ beliebig. Wegen $Y_0' = f(\xi)$ gilt

$$|Y_0'| + \|(Y, Y')\|_{X,2\alpha} \leq M.$$

Nach Lemma 7.2.3 gilt

$$\|(f(Y), f(Y)')\|_{X,2\alpha} \leq CM\|f\|_{C_b^2}\big(|Y_0'| + \|(Y,Y')\|_{X,2\alpha}\big).$$

Nach dem Satz von Gubinelli (Satz 4.3.9(c)) gilt

$$\begin{aligned}\left\|\left(\int_0^\cdot f(Y_s)d\mathbf{X}_s, f(Y)\right)\right\|_{X,2\alpha} &\leq \|f(Y)\|_\alpha + \|f(Y)'\|_\infty\|\mathbb{X}\|_{2\alpha} \\ &\quad + C\Big(\|X\|_\alpha\|R^{f(Y)}\|_{2\alpha} + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\|f(Y)'\|_\alpha\Big).\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}\|f(Y)'\|_\infty &\leq |f(Y_0)'| + \|f(Y)'\|_\alpha \quad \text{und} \\ \|(f(Y), f(Y)')\|_{X,2\alpha} &= \|f(Y)'\|_\alpha + \|R^{f(Y)}\|_{2\alpha}\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}&\left\|\left(\int_0^\cdot f(Y_s)d\mathbf{X}_s, f(Y)\right)\right\|_{X,2\alpha} \\ &\leq \|f(Y)\|_\alpha + C\Big(|f(Y_0)'| + \|(f(Y), f(Y)')\|_{X,2\alpha}\Big)\big(\|X\|_\alpha + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\big) \\ &\leq \|f(Y)\|_\alpha + C\Big(|f(Y_0)'| + \|(f(Y), f(Y)')\|_{X,2\alpha}\Big)T^{\beta-\alpha},\end{aligned}$$

wobei die Konstanten $C = C(\alpha,\beta,X,\mathbb{X}) > 0$ von Zeile zu Zeile verschieden sein können.

Invarianz: Für $(Y,Y') \in \mathbb{B}$ gilt

$$\begin{aligned}\|f(Y)\|_\alpha &\leq \|f\|_{C_b^1}\|Y\|_\alpha, \\ |f(Y_0)'| &= |Df(Y_0)Y_0'| = |Df(\xi)f(\xi)| \leq \|f\|_{C_b^1}^2,\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}\|\Phi_T(Y,Y')\|_{X,2\alpha} &= \left\|\int_0^\cdot f(Y_s)d\mathbf{X}_s, f(Y)\right\|_{X,2\alpha} \\ &= \|f(Y)\|_\alpha + C\Big(|f(Y_0)'| + \|(f(Y), f(Y)')\|_{X,2\alpha}\Big)T^{\beta-\alpha} \\ &\leq \|f\|_{C_b^1}\|Y\|_\alpha + C\Big(\|f\|_{C_b^1}^2 + CM\|f\|_{C_b^2}\big(|Y_0'| + \|(Y,Y')\|_{X,2\alpha}\big)\Big)T^{\beta-\alpha}.\end{aligned}$$

Es gilt $Y_{s,t} = R_{s,t}^Y + Y_s'X_{s,t}$, und daher

$$\begin{aligned}|Y_{s,t}| &\leq |Y'|_\infty|X_{s,t}| + \|R^Y\|_{2\alpha}|t-s|^{2\alpha} \\ &\leq (|Y_0'| + \|Y'\|_\alpha)\|X\|_\beta|t-s|^\beta + \|R^Y\|_{2\alpha}|t-s|^{2\alpha}.\end{aligned}$$

Wegen $\alpha < \beta < 2\alpha$ gilt

$$\begin{aligned} &T^{2\alpha} \le T^{\beta} \le T^{\beta-\alpha} \quad \text{und} \\ &\|R^Y\| \le \|(Y,Y')\|_{X,2\alpha} \le 1, \end{aligned}$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \|Y\|_\alpha &\le \Big(|Y_0'| + \|(Y,Y')\|_{X,2\alpha}\Big)\|X\|_\beta T^{\beta-\alpha} + \|R^Y\|_{2\alpha} T^{\beta-\alpha} \\ &\le \Big((\|f\|_\infty + 1)\|X\|_\beta + 1\Big) T^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\|\Phi_T(Y,Y')\|_{X,2\alpha} \le C\|f\|_{C_b^1}(\|f\|_\infty + 1)T^{\beta-\alpha} + CM\Big(\|f\|^2_{C_b^1} + \|f\|_{C_b^2}(\|f\|_\infty + 1)\Big)T^{\beta-\alpha}.$$

Also läßt Φ_{T_0} – für $T_0 \in (0,1]$ klein genug gewählt – die Kugel $\mathbb{B}$ invariant.

<u>Kontraktion:</u> Es seien $Y, \tilde{Y} \in \mathbb{B}$ beliebig. Wir setzen $\Delta := f(Y) - f(\tilde{Y})$. Dann gilt (wie oben)

$$\begin{aligned} d\big(\Phi_T(Y,Y'), \Phi_T(\tilde{Y},\tilde{Y}')\big) &= \|\Phi_T(Y,Y') - \Phi_T(\tilde{Y},\tilde{Y}')\|_{X,2\alpha} \\ &= \left\| \int_0^\cdot \Delta_s d\mathbf{X}_s, \Delta \right\|_{X,2\alpha} \\ &\le \|\Delta\|_\alpha + C\Big(|\Delta_0'| + \|(\Delta,\Delta')\|_{X,2\alpha}\Big)T^{\beta-\alpha} \\ &\le \|f\|_{C_b^1}\|Y - \tilde{Y}\|_\alpha + C\|(\Delta,\Delta')\|_{X,2\alpha}T^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Wegen $Y_{s,t} - \tilde{Y}_{s,t} = R^Y_{s,t} - R^{\tilde{Y}}_{s,t} + (Y_s' - \tilde{Y}_s')X_{s,t}$ gilt (wie oben)

$$\begin{aligned} \|Y - \tilde{Y}\|_\alpha &\le \|Y' - \tilde{Y}'\|_\alpha \|X\|_\beta T^{\beta-\alpha} + \|R^Y - R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha} T^{\beta-\alpha} \\ &\le CT^{\beta-\alpha}\|(Y - \tilde{Y}), (Y', \tilde{Y}')\|_{X,2\alpha} \\ &= CT^{\beta-\alpha} d\big((Y,Y'), (\tilde{Y},\tilde{Y}')\big). \end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass

$$\|(\Delta,\Delta')\|_{X,2\alpha} \le C\, d\big((Y,Y'),(\tilde{Y},\tilde{Y}')\big).$$

Ähnlich wie im Beweis von Lemma 8.1.4 gilt $\Delta_s = G_s H_s$, wobei

$$G_s := g(Y_s, \tilde{Y}_s) \quad \text{und} \quad H_s := Y_s - \tilde{Y}_s$$

mit einem $g \in C_b^2$, so dass $\|g\|_{C_b^2} \leq C\|f\|_{C_b^3}$. Wir setzen

$$\begin{aligned} G' := g(Y,\tilde{Y})' &= Dg(Y,\tilde{Y})(Y',\tilde{Y}') \\ &= D_Y g(Y,\tilde{Y})Y' + D_{\tilde{Y}} g(Y,\tilde{Y})\tilde{Y}' \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} D_y g(y,\tilde{y})Y &:= Dg(y,\tilde{y})(y,0) \quad \text{und} \\ D_{\tilde{y}} g(y,\tilde{y})Y &:= Dg(y,\tilde{y})(0,\tilde{y}). \end{aligned}$$

Nach Satz 7.2.1 und Lemma 7.2.3 gilt $(G,G') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$ und

$$\|(G,G')\|_{X,2\alpha} \leq C\|f\|_{C_b^3}.$$

Wegen $H_0 = 0$ und $H_0' = 0$ folgt mit Lemma 8.2.3

$$\begin{aligned} \|(\Delta,\Delta')\|_{X,2\alpha} &\leq C\Big(|G_0| + |G_0'| + \|(G,G')\|_{X,2\alpha}\Big)\|(H,H')\|_{X,2\alpha} \\ &\leq C\Big(\|g\|_\infty + \|g\|_{C_b^1}(|Y_0'| + |\tilde{Y}_0'|) + C\|f\|_{C_b^3}\Big) d\big((Y,Y'),(\tilde{Y},\tilde{Y}')\big) \\ &\leq C\Big(\|f\|_{C_b^3} + \|f\|_{C_b^3}(\|f\|_\infty + \|f\|_\infty) + C\|f\|_{C_b^3}\Big) d\big((Y,Y'),(\tilde{Y},\tilde{Y}')\big). \end{aligned}$$

Also ist $\Phi_{T_0} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ – für $T_0 \in (0,1]$ klein genug gewählt – eine Kontraktion.

Lösung liegt in $\mathscr{D}_X^{2\beta}$: Bisher haben wir eine Lösung $Y \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,1],W)$ konstruiert. Dies bedeutet

$$(Y_t, Y_t') = \left(\xi + \int_0^t f(Y_s)d\mathbf{X}_s, f(Y_t)\right), \quad t \in [0,1].$$

Es gilt jedoch

$$\mathscr{D}_X^{2\beta}([0,1],W) \subset \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,1],W).$$

Wegen $Y_{s,t} = Y_s' X_{s,t} + R_{s,t}^Y$ gilt

$$|Y_{s,t}| \leq \|Y'\|_\infty |X_{s,t}| + |R_{s,t}^Y|.$$

Wegen $X \in \mathcal{C}^\beta$ und $R^Y \in \mathcal{C}^{2\alpha} \subset C^\beta$ (da $\beta < 2\alpha$) folgt $Y \in C^\beta$. Nun folgt $Y' = f(Y) \in \mathcal{C}^\beta$. Nach dem Satz von Gubinelli (Satz 4.3.9(b)) gilt

$$\begin{aligned} |R_{s,t}^Y| = |Y_{s,t} - Y_s' X_{s,t}| &= \left| \int_s^t f(Y_r)d\mathbf{X}_r - f(Y_s)X_{s,t} \right| \\ &\leq |Y'|_\infty |\mathbb{X}_{s,t}| + Z_{s,t} \end{aligned}$$

mit $Z \in \mathcal{C}^{3\alpha} \subset \mathcal{C}^{2\beta}$, da $2\beta \leq 3\alpha$. Wegen $\mathbf{X} = (X,\mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\beta$ gilt $\mathbb{X} \in \mathcal{C}_2^{2\beta}$, und es folgt $\|R^Y\|_{2\beta} < \infty$. Insgesamt folgt $Y \in \mathscr{D}_X^{2\beta}([0,1],W)$. $\square$

Bemerkung 8.2.5. *Falls $f \in C^3(W, L(V,W))$, so existiert eine eindeutig bestimmte lokale Lösung.*

Bemerkung 8.2.6. *Satz 8.2.4 läßt sich für rauhe Differentialgleichungen der Form*

$$\begin{cases} dY_t &= f_0(Y_t)dt + f(Y_t)d\mathbf{X}_t \\ Y_0 &= \xi \end{cases}$$

mit einer Lipschitz-stetigen Funktion $f_0 : W \to W$ und $f \in C_b^3(W, L(V,W))$ verallgemeinern.

8.3 Stetigkeit der Itô-Lyons-Abbildung

Satz 8.3.1. *Es sei $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}), \tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}, \tilde{\mathbb{X}}) \in \mathscr{C}^\beta([0,T], V)$ für ein $\beta \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, und es sei $f \in C_b^3(W, L(V,W))$. Weiterhin seien $\xi, \tilde{\xi} \in W$ beliebig, und es seien $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\beta}([0,T], W)$, $(\tilde{Y}, \tilde{Y}') \in \mathscr{D}_{\tilde{X}}^{2\beta}([0,T], W)$ die gemäß Satz 8.2.4 eindeutig bestimmten Lösungen der rauhen Differentialgleichung mit $Y_0 = \xi$ und $\tilde{Y}_0 = \tilde{\xi}$. Es sei $M > 0$, so dass*

$$|||\mathbf{X}|||_\beta, |||\tilde{\mathbf{X}}|||_\beta \leq M.$$

Dann gelten die lokalen Lipschitz-Abschätzungen

$$d_{X,\tilde{X},2\beta}\Big((Y, f(Y)), (\tilde{Y}, f(\tilde{Y}))\Big) \leq C_M\Big(|\xi - \tilde{\xi}| + \varrho_\beta(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})\Big)$$

und

$$\|Y - \tilde{Y}\|_\beta \leq C_M\Big(|\xi - \tilde{\xi}| + \varrho_\beta(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})\Big)$$

mit einer Konstanten $C_M = C(M, \beta, f) > 0$.

Bemerkung 8.3.2. *Also ist für ein fixiertes $f \in C_b^3(W, L(V,W))$ die Itô-Lyons-Abbildung*

$$W \times \mathscr{C}^\beta \to \mathcal{C}^\beta, \quad (\xi, \mathbf{X}) \to Y$$

stetig; genauer lokal Lipschitz-stetig.

Kapitel 9

Stochastische Differentialgleichungen

9.1 Itô- und Stratonovich-Gleichungen

Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ eine stochastische Basis. Darauf sei B eine $\mathbb{R}^d$-wertige Brown'sche Bewegung. Weiterhin seien $f_0 \in C(\mathbb{R}^e, \mathbb{R}^e)$ und $f \in C_b^2(\mathbb{R}^e, \mathbb{R}^{e\times d})$. Wir betrachten die rauhe Itô-Differentialgleichung

$$\begin{cases} dY_t &= f_0(Y_t)dt + f(Y_t)d\mathbf{B}_t^{\text{Itô}} \\ Y_0 &= \xi, \end{cases}$$

die stochastische Itô-Differentialgleichung

$$\begin{cases} dY_t &= f_0(Y_t)dt + f(Y_t)dB_t \\ Y_0 &= \xi, \end{cases}$$

die rauhe Stratonovich-Differentialgleichung

$$\begin{cases} dY_t &= f_0(Y_t)dt + f(Y_t)d\mathbf{B}_t^{\text{Strat}} \\ Y_0 &= \xi, \end{cases}$$

und die stochastische Stratonovich-Differentialgleichung

$$\begin{cases} dY_t &= f_0(Y_t)dt + f(Y_t) \circ dB_t \\ Y_0 &= \xi. \end{cases}$$

Definition 9.1.1. *Es sei $\xi \in W$. Weiterhin sei Y ein stetiger, adaptierter Prozess.*

(a) Y ist eine <u>Lösung</u> der stochastischen Itô-Differentialgleichung mit $Y_0 = \xi$, falls $\mathbb{P}$-fast sicher

$$Y_t = \xi + \int_0^t f_0(Y_s)ds + \int_0^t f(Y_s)dB_s, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

(b) *Y ist eine* <u>*Lösung*</u> *der stochastischen Stratonovich-Differentialgleichung mit $Y_0 = \xi$, falls $\mathbb{P}$-fast sicher*

$$Y_t = \xi + \int_0^t f_0(Y_s)ds + \int_0^t f(Y_s) \circ dB_s, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Satz 9.1.2. *Die Funktion $f_0 : \mathbb{R}^e \to \mathbb{R}^e$ sei Lipschitz-stetig, und es gelte $f \in C_b^3(\mathbb{R}^e, \mathbb{R}^{e\times d})$. Weiterhin seien $\xi \in \mathbb{R}^e$ und $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ beliebig.*

(a) *Es existiert $\mathbb{P}$-fast sicher eine eindeutig bestimmte Lösung $(Y, Y') \in \mathscr{D}_B^{2\alpha}$ der rauhen Itô-Differentialgleichung mit $Y_0 = \xi$; diese ist auch eine Lösung der stochastischen Itô-Differentialgleichung.*

(b) *Es existiert $\mathbb{P}$-fast sicher eine eindeutig bestimmte Lösung $(Y, Y') \in \mathscr{D}_B^{2\alpha}$ der rauhen Stratonovich-Differentialgleichung mit $Y_0 = \xi$; diese ist auch eine Lösung der stochastischen Stratonovich-Differentialgleichung.*

Beweis.

(b) Nach Satz 3.3.4 gilt $\mathbb{P}$-fast sicher $\mathbf{B}^{\text{Strat}} \in \mathscr{C}_g^\alpha$. Also existiert nach Satz 8.2.4 (und Bemerkung 8.2.6) $\mathbb{P}$-fast sicher eine eindeutig bestimmte Lösung $(Y, Y') \in \mathscr{D}_B^{2\alpha}$ der rauhen Stratonovich-Differentialgleichung mit $Y_0 = \xi$. Wir werden zeigen, dass Y adaptiert ist. Dazu sei $t \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Weiterhin sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. wir setzen $\delta_n := \frac{t}{2^n}$. Dann ist

$$(\Omega, \mathscr{F}_t) \to (\mathbb{R}^d)^{2^n+1}, \quad \omega \mapsto (B_{k\delta_n}(\omega))_{k=0,\dots,2^n}$$

messbar. Weiterhin ist

$$(\mathbb{R}^d)^{2^n+1} \to (\mathscr{C}_g^\alpha, \varrho_\alpha), \quad x \mapsto (X^{(n)}, \mathbb{X}^{(n)})$$

mit der linearen Interpolation $X^{(n)}$ auf $[0, t]$ und

$$\mathbb{X}_{u,v}^{(n)} := \int_u^v X_{u,r}^{(n)} \otimes dX_r^{(n)}, \quad u, v \in [0, t]$$

stetig. Folglich ist

$$\mathbf{B}^{(n)} = (B^{(n)}, \mathbb{B}^{(n)}) : (\Omega, \mathscr{F}_t) \to (\mathscr{C}_g^\alpha, \varrho_\alpha),$$

definiert gemäß Definition 3.3.8, messbar. Nach Satz 3.3.16 gilt $\mathbb{P}$-fast sicher $\mathbf{B}^{(n)} \to \mathbf{B}^{\text{Strat}}$ in $\mathscr{C}_g^\alpha$, und folglich ist auch

$$\mathbf{B}^{\text{Strat}} : (\Omega, \mathscr{F}_t) \to (\mathscr{C}_g^\alpha, \varrho_\alpha)$$

messbar. Wegen der Stetigkeit der Itô-Lyons-Abbildung (Satz 8.3.1) ist daher auch die Abbildung

$$(\mathscr{C}_g^\alpha, \varrho_\alpha) \to \mathcal{C}^\alpha, \quad \mathbf{B}^{\mathrm{Strat}} \mapsto Y$$

messbar. Weiterhin ist

$$\mathcal{C}^\alpha \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(t)$$

ein stetiges lineares Funktional, und daher messbar. Insgesamt folgt, dass Y_t bezüglich $\mathscr{F}_t$ messbar ist. Da $t \in \mathbb{R}_+$ beliebig gewesen ist, folgt, dass Y adaptiert ist. Nun folgt mit Satz 5.2.1(b), dass Y eine Lösung der stochastischen Stratonovich-Differentialgleichung ist.

(a) Nach Satz 3.3.4 gilt $\mathbb{P}$-fast sicher $\mathbf{B}^{\mathrm{Itô}} \in \mathscr{C}^\alpha$. Also existiert nach Satz 8.2.4 (und Bemerkung 8.2.6) $\mathbb{P}$-fast sicher eine eindeutig bestimmte Lösung $(Y, Y') \in \mathscr{D}_B^{2\alpha}$ der rauhen Itô-Differentialgleichung mit $Y_0 = \xi$. Nach Lemma 3.3.2(a) gilt

$$\mathbb{B}_{s,t}^{\mathrm{Itô}} = \mathbb{B}_{s,t}^{\mathrm{Strat}} - \frac{t-s}{2}\mathrm{Id} \quad \text{für alle } s, t \in [0, T].$$

Also ist nach dem Beweis von Teil (b) der Prozess Y adaptiert. Mit Satz 5.1.1(b) folgt, dass Y eine Lösung der stochastischen Itô-Differentialgleichung ist.

□

9.2 Der Satz von Wong-Zakai

Es sei $T > 0$ fest. Wir definieren die Wong-Zakai-Approximationen $(B^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ auf dem Intervall $[0, T]$ wie in Abschnitt 3.3.

Satz 9.2.1 (Wong-Zakai). *Die Funktion $f_0 : \mathbb{R}^e \to \mathbb{R}^e$ sei Lipschitz-stetig, und es gelte $f \in C_b^3(\mathbb{R}^e, \mathbb{R}^{e\times d})$. Weiterhin seien $\xi \in \mathbb{R}^e$ und $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ beliebig. Es sei Y die Lösung der stochastischen Stratonovich-Differentialgleichung mit $Y_0 = \xi$, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei Y^n die Lösung der zufälligen gewöhnlichen Differentialgleichung*

$$\begin{cases} dY_t^n &= f_0(Y_t^n)dt + f(Y_t^n)dB_t^{(n)} \\ Y_0 &= \xi. \end{cases}$$

Dann gilt $\mathbb{P}$-fast sicher $\|Y - Y^n\|_\alpha \to 0$.

Beweis. Nach Satz 3.3.16 gilt $\mathbb{P}$-fast sicher $\mathbf{B}^{(n)} \to \mathbf{B}^{\mathrm{Strat}}$ in $\mathscr{C}_g^\alpha$; das heißt $\mathbb{P}$-fast sicher gilt $\varrho_\alpha(\mathbf{B}^{(n)}, \mathbf{B}) \to 0$. Wegen der Stetigkeit der Itô-Lyons-Abbildung (Satz 8.3.1) folgt $\mathbb{P}$-fast sicher $\|Y - Y^n\|_\alpha \to 0$. □

Kapitel 10

Gauß'sche rauhe Pfade

10.1 Hölder-Regularität von Gauß'schen Prozessen

Es sei X ein stetiger, zentrierter Gauß'scher Prozess mit Werten in $\mathbb{R}^d$.

Bemerkung 10.1.1. *Die Verteilung von X ist bestimmt durch die Kovarianzfunktion*

$$R : [0,T]^2 \to \mathbb{R}^{d\times d}, \quad (s,t) \mapsto \mathbb{E}[X_s \otimes X_t].$$

Definition 10.1.2. *X heißt eine <u>fraktionale Brown'sche Bewegung</u> mit Hurst-Index $H \in (0,1)$, falls*

$$R(s,t) = \frac{1}{2}\Big[s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}\Big] \cdot \mathrm{Id}.$$

Bemerkung 10.1.3. *Für $H = \frac{1}{2}$ erhalten wir eine Brown'sche Bewegung mit*

$$R(s,t) = \min\{s,t\} \cdot \mathrm{Id}.$$

Zur Erinnerung: Es gilt

$$\min\{x,y\} = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|) \quad \textit{für alle } x,y \in \mathbb{R}.$$

Definition 10.1.4. *Wir definieren allgemeiner*

$$R : [0,T]^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{d\times d}, \quad \begin{pmatrix} s & t \\ s' & t' \end{pmatrix} \mapsto \mathbb{E}[X_{s,t} \otimes X_{s',t'}].$$

Satz 10.1.5. *Wir nehmen an, dass Konstanten $\varrho, M > 0$ existieren, so dass*

$$\left| R\begin{pmatrix} s & t \\ s & t \end{pmatrix} \right| \le M|t-s|^{1/\varrho}.$$

Dann gilt für jedes $\alpha \in (0, \frac{1}{2\varrho})$, dass $\mathbb{P}$-fast sicher $X \in \mathcal{C}^\alpha$.

Bemerkung 10.1.6. *Falls $\varrho < 1$, dann erhalten wir Hölder-Pfade mit Exponent $\alpha \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2\varrho})$, und wir können die Young-Theorie benutzen.*

Beispiel 10.1.7. *Es sei X eine fraktionale Brown'sche Bewegung mit Hurst-Index $H \in (0,1)$. Dann gilt die Abschätzung aus Satz 10.1.5 mit $\varrho = \frac{1}{2H}$. Für $H \leq \frac{1}{2}$ gilt also $\varrho \geq 1$, was von der Young-Theorie nicht abgedeckt wird.*

10.2 Erweiterung von Gauß'schen Prozessen zu rauhen Pfaden

Definition 10.2.1. *Die Kovarianzfunktion R hat auf einem Rechteck $I \times I'$ die* <u>*ϱ-Variation*</u>

$$\|R\|_{\varrho, I\times I'} := \left(\sup_{\substack{\Pi \subset I \\ \Pi' \subset I'}} \sum_{\substack{[s,t]\in\Pi \\ [s',t']\in\Pi'}} \left| R\begin{pmatrix} s & t \\ s' & t' \end{pmatrix} \right|^{\varrho} \right)^{1/\varrho}.$$

Satz 10.2.2. *Es seien $X, \tilde{X}$ unabhängige, stetige, zentrierte Gauß'sche Prozesse mit Werten in $\mathbb{R}$ und endlichen ϱ-Variationen auf $[0,1]^2$ für ein $\varrho < 2$. Dann existiert das Integral*

$$\int_0^1 X_{0,r} d\tilde{X}_r := (\mathrm{L}^2\text{–}) \lim_{|\Pi|\downarrow 0} \sum_{[u,v]\in\Pi} X_{0,u}\tilde{X}_{u,v},$$

und es gilt

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^1 X_{0,r} d\tilde{X}_r \right)^2 \right] \leq C \|R\|_{\varrho;[0,1]^2} \|\tilde{R}\|_{\varrho;[0,1]^2}$$

für ein $C = C(\varrho) > 0$.

Satz 10.2.3. *Es sei X ein stetiger, zentrierter Gauß'scher Prozess mit Werten in $\mathbb{R}^d$ und unabhängigen Komponenten. Wir nehmen an, dass $\rho \in [1, \frac{3}{2})$ und $M > 0$ existieren, so dass für alle $i = 1, \ldots, d$ gilt*

$$\|R_{X^i}\|_{\varrho;[s,t]^2} \leq M|t-s|^{1/\varrho}, \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Wir definieren gemäss Satz 10.2.2 für $i < j$

$$\mathbb{X}^{i,j}_{s,t} := \int_s^t (X^i_r - X^i_s) dX^j_r$$

und

$$\mathbb{X}^{i,i}_{s,t} := \frac{1}{2}(X^i_{s,t})^2 \quad \textit{und}$$
$$\mathbb{X}^{j,i}_{s,t} := -\mathbb{X}^{i,j}_{s,t} + X^i_{s,t}X^j_{s,t} \quad \textit{für } i < j.$$

Dann gilt für jedes $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2\varrho})$, *dass* $\mathbb{P}$*-fast sicher* $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha_g$.

10.3 Gauß'sche Prozesse mit stationären Zuwächsen

Definition 10.3.1. *Es sei* X *ein* $\mathbb{R}$*-wertiger stetiger, zentrierter Gauß'scher Prozess mit stationären Zuwächsen. Wir definieren die Varianzfunktion*

$$\sigma^2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad \sigma^2(u) := \mathbb{E}[X^2_{t,t+u}] = R\begin{pmatrix} t & t+u \\ t & t+u \end{pmatrix}.$$

Satz 10.3.2. *Es sei* X *ein* $\mathbb{R}^d$*-wertiger zentrierter, stetiger Gauß'scher Prozess mit stationären Zuwächsen und unabhängigen Komponenten. Wir nehmen an, dass* $h > 0$, $L \geq 1$ *und* $\varrho \in [1, \frac{3}{2}]$ *existieren, so dass für jedes* $i = 1, \dots, d$ *die Varianzfunktion* $\sigma^2_{X^i}$ *auf* $[0, h]$ *konkav und monoton wachsend ist, und*

$$|\sigma^2_{X^i}(\tau)| \leq L|\tau|^{1/\varrho}, \quad \tau \in [0, h].$$

Dann gilt für jedes $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2\varrho})$, *dass* $\mathbb{P}$*-fast sicher* $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha_g$.

Beispiel 10.3.3. *Es sei* X *eine* $\mathbb{R}^d$*-wertige fraktionale Brown'sche Bewegung mit Hurst-Index* $H \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$. *Dann gilt*

$$\sigma^2_{X^i}(u) = u^{2H}, \quad u \in \mathbb{R}_+.$$

Die Varianzfunktion ist monoton wachsend und konkav, da $H \leq \frac{1}{2}$, *und die Abschätzung gilt mit* $\varrho = \frac{1}{2H}$. *Also gilt nach Satz 10.3.2 für jedes* $\alpha \in (\frac{1}{3}, H)$, *dass* $\mathbb{P}$*-fast sicher* $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha_g$.

Beispiel 10.3.4. *Es sei* X *ein* $\mathbb{R}^d$*-wertiger zentrierter, stetiger Gauß'scher Prozess mit unabhängigen Komponenten, so dass*

$$\mathbb{E}[X^i_s X^i_t] = K(|t-s|), \quad K(u) = \exp(-cu)$$

mit einem $c > 0$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned}\sigma^2(u) = \mathbb{E}[X^2_{t,t+u}] &= \mathbb{E}[X^2_{t+u}] - 2\mathbb{E}[X_t X_{t+u}] + \mathbb{E}[X^2_t] \\ &= 2(K(0) - K(u)) = 2(1 - \exp(-cu)).\end{aligned}$$

Die Varianzfunktion ist monoton wachsend und konkav, da

$$(\sigma^2)'(u) = 2c\exp(-cu) > 0,$$
$$(\sigma^2)''(u) = -2c^2\exp(-cu) < 0.$$

Außerdem gilt

$$\sigma^2(u) \leq 2cu.$$

Also ist die Abschätzung mit $\varrho = 1$ *erfüllt. Nach Satz 10.3.2 gilt für jedes* $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, *dass* $\mathbb{P}$*-fast sicher* $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}_g^\alpha$.

Bemerkung 10.3.5. *Es sei* X *die Lösung der stochastischen Differentialgleichung*

$$dX_t = -cX_t\,dt + \sqrt{2c}\,dB_t$$

mit $X_0 \sim \mathrm{N}(0,1)$. *Dann ist* X *ein Gauß'scher Prozess wie in Beispiel 10.3.4; ein sogenannter Ohrstein-Uhlenbeck-Prozess mit stationärer Anfangsverteilung.*

Literaturverzeichnis

[AMR88] Abraham, R. ; Marsden, J. E. ; Ratiu, T.: *Manifolds, tensor analysis and applications.* New York : Springer-Verlag, 1988

[FH14] Friz, P. K. ; Hairer, M.: *A course on rough paths.* Cham : Springer-Verlag, 2014

[JS03] Jacod, J. ; Shiryaev, A. N.: *Limit theorems for stochastic processes.* Berlin : Springer-Verlag, 2003 (Grundlagen der mathematischen Wissenschaften 288)

[KS91] Karatzas, I. ; Shreve, S. E.: *Brownian motion and stochastic calculus.* New York : Springer-Verlag, 1991

[Pro05] Protter, P.: *Stochastic integration and differential equations.* Berlin : Springer-Verlag, 2005

[RY05] Revuz, D. ; Yor, M.: *Continuous martingales and Brownian motion.* Berlin : Springer-Verlag, 2005

[Wer07] Werner, D.: *Funktionalanalysis.* Berlin : Springer-Verlag, 2007