Übungen zur Vorlesung **Stochastic Analysis with Rough Paths**

Blatt 8

apl. Prof. Dr. Stefan Tappe – WS 2017/18

Aufgabe 1. Es sei $(X, \mathbb{S}) \in \mathscr{C}_r^\alpha$ für ein $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ beliebig. Zeigen Sie, dass ein $\gamma \in \mathcal{C}^{2\alpha}([0,T], \mathrm{Sym}(V \otimes V))$ existiert, so dass

$$\mathbb{S}_{s,t} = \bar{\mathbb{S}}_{s,t} + \frac{1}{2}(\gamma_t - \gamma_s) = \frac{1}{2}(X_{s,t} \otimes X_{s,t} + \gamma_{s,t}) \quad \text{für alle } s,t \in [0,T].$$

Aufgabe 2. Es seien $\mathbf{X} = (X, \mathbb{S}) \in \mathscr{C}_r^\alpha$ und $\gamma \in \mathcal{C}^{2\alpha}$ die Funktion aus Aufgabe 1.

(a) Zeigen Sie, dass $[\mathbf{X}]_{s,t} = -\gamma_{s,t}$ für alle $s,t \in [0,T]$, und folglich $[\mathbf{X}] \in \mathcal{C}^{2\alpha}$

(b) Zeigen Sie, dass $[\mathbf{X}]_{s,t} = [\mathbf{X}]_t - [\mathbf{X}]_s$ für alle $s,t \in [0,T]$.

(c) Zeigen Sie, dass $\bar{\mathbb{S}}_{s,t} = \mathbb{S}_{s,t} + \frac{1}{2}[\mathbf{X}]_{s,t}$ für alle $s,t \in [0,T]$.

(d) Es gelte $\mathbb{S} = \bar{\mathbb{S}}$. Zeigen Sie, dass dann $[\mathbf{X}] = 0$.

Aufgabe 3. Es seien B eine $\mathbb{R}^d$-wertige Brown'sche Bewegung und $\mathbb{B} = \mathbb{B}^{\text{Itô}}$. Weiterhin sei $\bar{\mathbf{B}} = (B, \mathbb{S})$ der zugehörige reduzierte rauhe Pfad.

(a) Zeigen Sie, dass $[\bar{\mathbf{B}}]_t = t \cdot \mathrm{Id}$ für alle $t \in [0,T]$.

(b) Folgern Sie aus der Itô-Formel für reduzierte rauhe Pfade, dass für jede Funktion $F \in C_b^3(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ fast sicher gilt

$$F(B_t) = F(B_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_i F(B_s) dB_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_{ii} F(B_s) ds, \quad t \in [0,T].$$

(c) Folgern Sie aus der Itô-Formel für reduzierte rauhe Pfade, dass für jede Funktion $F \in C_b^3(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ fast sicher gilt

$$F(B_t) = F(B_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \partial_i F(B_s) \circ dB_s^i, \quad t \in [0, T].$$

Aufgabe 4. Es seien $F \in C_b^3(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)$ und $X : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ eine stetige Funktion. Weiterhin sei $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Partitionen des Intervalls $[0, T]$ mit $|\Pi_n| \to 0$, so dass X endliche quadratische Variation entlang $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat, und $[X, X]$ stetig ist. Zeigen Sie, dass

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t DF(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t D^2 F(X_s) d[X, X]_s, \quad t \in [0, T].$$