Übungen zur Vorlesung **Stochastic Analysis with Rough Paths**

Blatt 7

apl. Prof. Dr. Stefan Tappe – WS 2017/18

Aufgabe 1. Es sei $(\mathscr{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration. Weiterhin seien $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ quadratintegrierbare Prozesse, so dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable B_k von $\mathscr{F}_{k-1}$ unabhängig mit $\mathbb{E}[B_k] = 0$ ist. Außerdem nehmen wir an, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable Y_k bezüglich $\mathscr{F}_{k-1}$ messbar ist, und dass B_k bezüglich $\mathscr{F}_k$ messbar ist. Wir definieren den Prozess $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch $S_0 := 0$ und

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} Y_k B_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeigen Sie, dass S ein $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-Martingal ist.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{k=0}^{n-1}(S_{k+1} - S_k)\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n-1}|S_{k+1} - S_k|^2\right].$$

Aufgabe 2. Es seien B eine $\mathbb{R}$-wertige Brown'sche Bewegung und $\mathbb{B} = \mathbb{B}^{\text{Itô}}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}\left[|\mathbb{B}_{s,t}|^2\right] = \frac{(t-s)^2}{2}.$$

Aufgabe 3. Es sei $T \in L(V \otimes V, W)$ ein symmetrischer linearer Operator; das heißt

$$Tx = Tx^* \quad \text{für alle } x \in V \otimes V.$$

Zeigen Sie, dass $Tx = 0$ für jedes antisymmetrische $x \in V \otimes V$.

Aufgabe 4. Es sei $X \in \mathcal{C}^\alpha$ für ein $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$. Wir definieren $\bar{\mathbb{S}} : [0,T]^2 \to \mathrm{Sym}(V \otimes V)$ durch

$$\bar{\mathbb{S}}_{s,t} := \frac{1}{2} X_{s,t} \otimes X_{s,t} \quad \text{für alle } s,t \in [0,T].$$

(a) Zeigen Sie, dass $(X, \bar{\mathbb{S}}) \in \mathscr{C}_r^\alpha$.

(b) Zeigen Sie allgemeiner, dass für jedes $\gamma \in \mathcal{C}^{2\alpha}([0,T], \mathrm{Sym}(V \otimes V))$ gilt $(X, \mathbb{S}) \in \mathscr{C}_r^\alpha$, wobei $\mathbb{S}$ gegeben ist durch

$$\mathbb{S}_{s,t} := \bar{\mathbb{S}}_{s,t} + \frac{1}{2}(\gamma_t - \gamma_s) = \frac{1}{2}(X_{s,t} \otimes X_{s,t} + \gamma_{s,t}) \quad \text{für alle } s,t \in [0,T].$$