Übungen zur Vorlesung **Stochastic Analysis with Rough Paths**

Blatt 6

apl. Prof. Dr. Stefan Tappe – WS 2017/18

Aufgabe 1. Es seien $X \in \mathcal{C}^\alpha([0,T],V)$ und $Y \in \mathcal{C}^\beta([0,T],L(V,W))$ mit $\alpha+\beta>1$.

(a) Es seien $s,t \in [0,T]$ mit $s<t$ beliebig. Wir definieren

$$\tilde{X} : [0,1] \to V, \quad u \mapsto X(s+u(t-s)).$$

Zeigen Sie, dass

$$\|\tilde{X}\|_{\alpha;[0,1]} = |t-s|^\alpha \|X\|_{\alpha;[s,t]}.$$

(b) Zeigen Sie, dass eine Konstante $C = C(\alpha+\beta) > 0$ existiert, so dass

$$\left| \int_s^t Y_r \, dX_r - Y_s X_{s,t} \right| \leq C \|Y\|_{\beta;[s,t]} \|X\|_{\alpha;[s,t]} |t-s|^{\alpha+\beta} \quad \text{für alle } s,t \in [0,T].$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$\left\| \int_0^\cdot Y_r \, dX_r \right\|_{\alpha;[0,T]} \leq K\big(|Y_0| + \|Y\|_{\beta;[0,T]}\big) \|X\|_{\alpha;[0,T]},$$

wobei die Konstante $K = K(\alpha,\beta,T) > 0$ gleichmäßig bezüglich $T \leq 1$ gewählt werden kann.

Aufgabe 2. Es sei $F \in \mathcal{C}^\alpha([0,T],V)$ für ein $\alpha > 1$. Zeigen Sie, dass F konstant ist.

Aufgabe 3. Es seien $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ und $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$ für ein $\alpha > \frac{1}{3}$. Wir definieren die Funktionen

$$\begin{aligned}
\Xi : \Delta_T^2 \to W, &\quad \Xi_{s,t} := Y_s X_{s,t} + Y'_s \mathbb{X}_{s,t}, \\
\delta\Xi : \Delta_T^3 \to W, &\quad \delta\Xi_{s,u,t} := \Xi_{s,t} - \Xi_{s,u} - \Xi_{u,t}, \\
R^Y : [0,T]^2 \to L(V,W), &\quad R^Y_{s,t} := Y_{s,t} - Y'_s X_{s,t}.
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für alle $(s,u,t) \in \Delta_T^3$ gilt

$$\delta\Xi_{s,u,t} = -R^Y_{s,u} X_{u,t} - Y'_{s,u} \mathbb{X}_{u,t}.$$

Aufgabe 4. Es sei $X \in \mathcal{C}^\alpha$ fest. Zeigen Sie, dass für alle $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$ gilt

$$\|Y\|_\alpha \leq C(1 + \|X\|_\alpha) \,|\!|\!|\, (Y, Y') |\!|\!|_{X,2\alpha},$$

wobei die Konstante $C = C(\alpha, T) > 0$ gleichmäßig von $T \leq 1$ abhängt.

Aufgabe 5. Es seien $X \in \mathcal{C}^\alpha$ und $\mathbb{X}, \bar{\mathbb{X}} \in \mathcal{C}_2^{2\alpha}$, so dass $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}), \bar{\mathbf{X}} = (X, \bar{\mathbb{X}}) \in \mathscr{C}^\alpha$. Bekanntlich existiert dann eine Funktion $f \in C^{2\alpha}([0,T], V \otimes V)$, so dass

$$\bar{\mathbb{X}}_{s,t} = \mathbb{X}_{s,t} + f_{s,t}, \quad s,t \in [0,T].$$

Weiterhin sei $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass das

$$\int_0^T Y'_r \, df_r$$

im Sinne des Young-Integrals existiert.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $s,t \in [0,T]$ gilt

$$\int_s^t Y_r \, d\bar{\mathbf{X}}_r = \int_s^t Y_r \, d\mathbf{X}_r + \int_s^t Y'_r \, df_r.$$

Aufgabe 6. Es sei $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ ein rauher Pfad. Weiterhin sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig.

(a) Wir setzen $\lambda\mathbf{X} := (\lambda X, \lambda^2\mathbb{X})$. Zeigen Sie, dass $\lambda\mathbf{X} \in \mathscr{C}^\alpha$.

(b) Nun sei $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$ gegeben. Zeigen Sie, dass $(\lambda^{-1}Y, \lambda^{-2}Y') \in \mathscr{D}_{\lambda X}^{2\alpha}$ mit $R^{\lambda^{-1}Y} = \lambda^{-1}R^Y$.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $s, t \in [0, T]$ gilt

$$\int_s^t Y_r \, d\mathbf{X}_r = \int_s^t (\lambda^{-1}Y) \, d(\lambda\mathbf{X})_r.$$