Übungen zur Vorlesung **Stochastic Analysis with Rough Paths**

Blatt 5

apl. Prof. Dr. Stefan Tappe – WS 2017/18

Aufgabe 1. (Interpolation) Es seien $\frac{1}{3} < \alpha < \beta \leq \frac{1}{2}$. Es sei $\mathbf{X}^n = (X^n, \mathbb{X}^n)$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge aus $\mathscr{C}^\beta \subset \mathscr{C}^\alpha$, so dass

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|X^n\|_\beta < \infty \quad \text{und} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mathbb{X}^n\|_{2\beta} < \infty.$$

Weiterhin sei $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X})$, so dass

$$X^n_{0,t} \to X_{0,t} \quad \text{und} \quad \mathbb{X}^n_{0,t} \to \mathbb{X}_{0,t} \quad \text{für alle } t \in [0,T].$$

(a) Zeigen Sie die gleichmäßigen Konvergenzen

$$\sup_{s,t\in[0,T]} |X^n_{s,t} - X_{s,t}| \to 0 \quad \text{und} \quad \sup_{s,t\in[0,T]} |\mathbb{X}^n_{s,t} - \mathbb{X}_{s,t}|.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^\beta \subset \mathscr{C}^\alpha$ und $\varrho_\alpha(\mathbf{X}^n, \mathbf{X}) \to 0$.

Aufgabe 2. Es sei E ein Banachraum. Eine auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definierte E-wertige Zufallsvariable $X : \Omega \to E$ heißt symmetrisch, falls $\mathbb{P}^X = \mathbb{P}^{-X}$; das heißt, die Zufallsvariablen X und $-X$ sind identisch verteilt.

(a) Es seien X und Y unabhängige E-wertige Zufallsvariablen, so dass X symmetrisch ist. Zeigen Sie, dass für jedes $p \in [1, \infty)$ gilt

$$\mathbb{E}[\|X\|^p] \leq \mathbb{E}[\|X + Y\|^p].$$

(b) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige symmetrische E-wertige Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass für alle $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$ die E^n-wertigen Zufallsvariablen $(X_1, \ldots, X_n)$ und $(\epsilon_1 X_1, \ldots, \epsilon_n X_n)$ identisch verteilt sind.

Aufgabe 3. Es sei E ein Banachraum. Weiterhin seien $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ unabhängige E-wertige Zufallsvariablen mit symmetrischen Verteilungen. Wir setzen

$$S_k := \sum_{j=1}^{k} \xi_j, \quad k \in \mathbb{N}.$$

(a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Zeigen Sie, dass für jedes $r \geq 0$ gilt

$$\mathbb{P}\Big(\max_{k=1,\dots,n} \|S_k\| > r \Big) \leq 2\mathbb{P}(\|S_n\| > r).$$

(b) Nun sei S eine E-wertige Zufallsvariable, so dass für jedes $r > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\|S - S_n\| > r) = 0.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}$-fast sicher gilt

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j.$$

Aufgabe 4. Wir betrachten nun den mathematischen Rahmen von Blatt 4, Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die Konvergenz

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \beta^k e_k$$

aus Teil (a) sogar gleichmäßig auf dem kompakten Intervall $[0, T]$ im $\mathbb{P}$-fast sicheren Sinne stattfindet.