Übungen zur Vorlesung **Stochastic Analysis with Rough Paths**

Blatt 4

apl. Prof. Dr. Stefan Tappe – WS 2017/18

Aufgabe 1. Es sei B eine $\mathbb{R}^d$-wertige Brown'sche Bewegung.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{B}^{\text{Strat}}_{s,t} = \mathbb{B}^{\text{Itô}}_{s,t} + \frac{t-s}{2}\text{Id}, \quad s,t \in [0,T].$$

Folgern Sie, dass eine Funktion $F \in \bigcap_{\alpha \in (\frac{1}{3},\frac{1}{2})} C^{2\alpha}([0,T],\mathbb{R}^{d\times d})$ existiert, so dass

$$\mathbb{B}^{\text{Strat}}_{s,t} = \mathbb{B}^{\text{Itô}}_{s,t} + F_t - F_s, \quad s,t \in [0,T].$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\text{Sym}(\mathbb{B}^{\text{Strat}}_{s,t}) = \frac{1}{2} B_{s,t} \otimes B_{s,t}, \quad s,t \in [0,T].$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$\text{Anti}(\mathbb{B}^{\text{Strat}}_{s,t}) = \text{Anti}(\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{s,t}), \quad s,t \in [0,T].$$

Aufgabe 2. Es sei B eine $\mathbb{R}^d$-wertige Brown'sche Bewegung.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $i \in \{1,\dots,d\}$ gilt

$$\mathbb{B}^{i,i}_{s,t} = \frac{(B^i_{s,t})^2 - (t-s)}{2}, \quad s,t \in [0,T].$$

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $i \in \{1,\dots,d\}$ gilt

$$\mathbb{B}^{\text{Strat};i,i}_{s,t} = \frac{(B^i_{s,t})^2}{2}, \quad s,t \in [0,T].$$

Aufgabe 3. Es sei H ein separabler Hilbertraum mit Orthonormalbasis $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

(a) Es sei $(\xi^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellwertigen Zufallsvariablen, so dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\big[|\xi^k|^2\big] < \infty.$$

Zeigen Sie, dass der Limes

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} \xi^k e_k$$

fast sicher und im L^2-Sinne existiert.

(b) Nun sei $(\xi^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Familien $(\xi_t^k)_{t\in\mathbb{T}}$ von Zufallsvariablen für eine Indexmenge $\mathbb{T}$, so dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in\mathbb{T}} |\xi_t^k|^2\right] < \infty.$$

Zeigen Sie, dass der Limes

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} \xi^k e_k$$

gleichmässig auf $\mathbb{T}$ im L^2-Sinne existiert.

Aufgabe 4. Es sei H ein separabler Hilbertraum mit Orthonormalbasis $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Weiterhin sei $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ eine Folge mit $\sum_{k=1}^\infty \lambda_k < \infty$, und es sei $(\beta^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen reellwertigen Brown'schen Bewegungen.

(a) Zeigen Sie, dass der für jedes $t \in [0,T]$ der Limes

$$X_t := \sum_{k=1}^\infty \sqrt{\lambda_k}\beta_t^k e_k$$

fast sicher und im L^2-Sinne existiert. (Bemerkung: $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ ist ein sogenannter Q-Wiener-Prozess, wobei der nukleare, selbstadjungierte, positiv definite Operator $Q \in L(H)$ gegeben ist durch $Qe_k = \lambda_k e_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.)

(b) Zeigen Sie, dass die Konvergenz aus Teil (a) sogar gleichmäßig auf dem kompakten Intervall $[0,T]$ im L^2-Sinne stattfindet.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $s,t \in [0,T]$ die $H \otimes H \cong \mathrm{HS}(H)$-wertigen Grenzwerte

$$\mathbb{X}_{s,t}^{\text{Itô}} := \sum_{j,k=1}^\infty \sqrt{\lambda_j\lambda_k}\bigg(\int_s^t \beta_{s,r}^j d\beta_r^k\bigg)(e_j \otimes e_k),$$

$$\mathbb{X}_{s,t}^{\text{Strat}} := \sum_{j,k=1}^\infty \sqrt{\lambda_j\lambda_k}\bigg(\int_s^t \beta_{s,r}^j \circ d\beta_r^k\bigg)(e_j \otimes e_k)$$

fast sicher und im L^2-Sinne existieren.

(d) Nun setzen wir $\mathbf{X}^{\text{Itô}} := (X, \mathbb{X}^{\text{Itô}})$ und $\mathbf{X}^{\text{Strat}} := (X, \mathbb{X}^{\text{Strat}})$. Zeigen Sie, dass der Prozess $\mathbf{X}^{\text{Itô}}$ die Chen-Gleichung erfüllt.

(e) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{X}^{\text{Strat}} = \mathbb{X}^{\text{Itô}} + \frac{t-s}{2}Q \quad \text{für alle } s,t \in [0,T],$$

und folgern Sie, dass der Prozess $\mathbf{X}^{\text{Strat}}$ die Chen-Gleichung erfüllt.

(f) Zeigen Sie, dass die Konvergenzen aus Teil (c) sogar gleichmäßig auf dem kompakten Rechteck $[0,T] \times [0,T]$ im L^2-Sinne stattfinden.

(g) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{X}_{s,t}^{\text{Strat}}) = \frac{1}{2}X_{s,t} \otimes X_{s,t} \quad \text{für alle } s,t \in [0,T].$$

(h) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{X}_{s,t}^{\text{Itô}}) = \frac{1}{2}X_{s,t} \otimes X_{s,t} - \frac{t-s}{2}Q \quad \text{für alle } s,t \in [0,T].$$