



Übungen zur Vorlesung **Stochastic Analysis with Rough Paths**

Blatt 3

apl. Prof. Dr. Stefan Tappe – WS 2017/18

Aufgabe 1. Es sei $X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ein Prozess. Wir nehmen an, dass Konstanten $q > 1$, $\beta \in (0, 1)$ mit $\beta - \frac{1}{q} \in (0, 1)$ und $C > 0$ existieren, so dass

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^q] \leq C|t - s|^\beta \quad \text{für alle } s, t \in [0, T].$$

Zeigen Sie, dass für jedes $\alpha \in (0, \beta - \frac{1}{q})$ gilt $X \in \mathcal{C}^\alpha$ fast sicher.

Anleitung: Benutzen Sie beim Beweis, dass für alle $r \in (0, 1)$ mit $rq > 1$ und

$$\alpha = \frac{rq - 1}{q} = r - \frac{1}{q} \in (0, 1)$$

gilt $W^{r,q} \hookrightarrow \mathcal{C}^\alpha$ mit stetiger Einbettung. Hierbei bezeichnet $W^{r,q}$ den Slobodetskii-Raum (auch fraktionaler Sobolev-Raum genannt) aller $f \in L^q$ mit

$$\|f\|_{W^{r,q}} := \left(\|f\|_{L^q}^q + \int_0^T \int_0^T \frac{|f(x) - f(y)|^q}{|x - y|^{1+rq}} \right)^{1/q} < \infty,$$

und \mathcal{C}^α den bekannten Raum aller Hölder-stetigen Funktionen der Ordnung α , versehen mit der Norm

$$\|f\|_{\mathcal{C}^\alpha} := \|f\|_\infty + \sup_{\substack{s, t \in [0, T] \\ s \neq t}} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\alpha}.$$

Aufgabe 2. Es sei $\mathbf{B} = (B, \mathbb{B})$ mit $\mathbb{B} = \mathbb{B}^{\text{It}\hat{o}}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{B}_{s,t} = \mathbb{B}_{0,t} - \mathbb{B}_{0,s} - B_s \otimes B_{s,t} \quad \text{für alle } s, t \in [0, T].$$

(b) Zeigen Sie, dass der Prozess \mathbf{B} die Chen-Gleichung erfüllt.

Aufgabe 3. Es sei $\mathbf{B} = (B, \mathbb{B})$ mit $\mathbb{B} = \mathbb{B}^{\text{It}\hat{o}}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\text{Sym}(\mathbb{B}_{0,t}) = \frac{1}{2}(B_t \otimes B_t - t \cdot \text{Id}) \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\text{Sym}(\mathbb{B}_{s,t}) = \frac{1}{2}B_{s,t} \otimes B_{s,t} - \frac{t-s}{2}\text{Id} \quad \text{für alle } s, t \in [0, T].$$