Übungen zur Vorlesung **Stochastic Analysis with Rough Paths**

Blatt 2

apl. Prof. Dr. Stefan Tappe – WS 2017/18

Aufgabe 1. Es sei $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ ein rauher Pfad.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{X}_{t,t} = 0$ für alle $t \in [0,T]$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{X}_{s,t} = X_{s,t} \otimes X_{s,t} - \mathbb{X}_{t,s}$ für alle $s,t \in [0,T]$.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{X}_{s,t} = \mathbb{X}_{0,t} - \mathbb{X}_{0,s} - X_{0,s} \otimes X_{s,t}$ für alle $s,t \in [0,T]$.

(d) Zeigen Sie, dass für alle $0 \leq s = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = t$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{X}_{s,t} &= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{X}_{\tau_i,\tau_{i+1}} + \sum_{\substack{j,i=0 \\ j<i}}^{N-1} X_{\tau_j,\tau_{j+1}} \otimes X_{\tau_i,\tau_{i+1}} \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \big(\mathbb{X}_{\tau_i,\tau_{i+1}} + X_{s,\tau_i} \otimes X_{\tau_i,\tau_{i+1}} \big).\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Es sei $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ ein rauher Pfad.

(a) Es sei $F \in C^{2\alpha}([0,T], V \otimes V)$. Wir definieren $\bar{\mathbb{X}} \in \mathcal{C}_2^{2\alpha}$ durch

$$\bar{\mathbb{X}}_{s,t} := \mathbb{X}_{s,t} + F_t - F_s \quad \text{für alle } s,t \in [0,T].$$

Zeigen Sie, dass $(X, \bar{\mathbb{X}}) \in \mathscr{C}^\alpha$.

(b) Es sei $\bar{\mathbb{X}} \in \mathcal{C}_2^{2\alpha}$, so dass $(X, \bar{\mathbb{X}}) \in \mathscr{C}^\alpha$ gilt. Zeigen Sie, dass eine Funktion $F \in C^{2\alpha}([0,T], V \otimes V)$ existiert, so dass

$$\bar{\mathbb{X}}_{s,t} = \mathbb{X}_{s,t} + F_t - F_s \quad \text{für alle } s,t \in [0,T].$$

Aufgabe 3. Es sei $X \in C^1([0,T],V)$. Wir definieren $\mathbb{X}$ durch

$$\mathbb{X}_{s,t} := \int_s^t X_{s,r} \otimes \dot{X}_r \, dr, \quad s,t \in [0,T].$$

Zeigen Sie, dass $(X,\mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ für jedes $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$.

Aufgabe 4. Es sei $X : [0,T] \to V$ stetig und von beschränkter Variation. Wir definieren $\mathbb{X}$ durch

$$\mathbb{X}_{s,t} := \int_s^t X_{s,r} \otimes dX_r, \quad s,t \in [0,T].$$

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gilt partielle Integration

$$\mathrm{Sym}\left(\int_s^t X_r \otimes dX_r \right) = \frac{1}{2}\big(X_t \otimes X_t - X_s \otimes X_s\big) \quad \text{für alle } s,t \in [0,T].$$

(ii) Es gilt

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{X}_{s,t}) = \frac{1}{2} X_{s,t} \otimes X_{s,t} \quad \text{für alle } s,t \in [0,T].$$